III Gara a Squadre, Liceo Scientifico "A.Einstein", Teramo

15 febbraio 2011

Durata: 90 minuti

Istruzioni generali

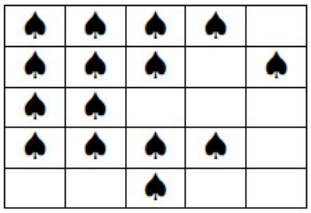
- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Se la quantità richiesta è una percentuale o la misura di un angolo espressa in gradi, si indichi il numero che precede il simbolo. Ad esempio 12% e 25° vanno indicati rispettivamente con 0012 e 0025.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,414, \qquad \sqrt{3} = 1,732, \qquad \sqrt{6} = 2,449, \qquad \pi = 3,142$$

Problemi

1. Tabella bilanciata. **20 punti**

Nella figura accanto, ogni ♠ può essere spostato in una cella vuota. Qual è il più piccolo numero di ♠ che si devono spostare in modo che ogni riga ed ogni colonna contenga tre ♠ ?



---

2. Rappresentazione decimale. **20 punti**

Se m, n rappresentano rispettivamente il numero di cifre di 2^{2009} e 5^{2009} (nella rappresentazione in base 10), determinare il valore di $m + n$.

---

3. Triangoli eroniani. **20 punti**

Due lati di un triangolo ottusangolo hanno lunghezze 5 ed 11. Determinare il numero delle possibili lunghezze *intere* del terzo lato.

---

4. Equazione di secondo grado. **20 punti**

Sia $2-\sqrt{99}$ una soluzione dell'equazione $x^2+ax+b=0$, dove b è un numero reale negativo ed a è un numero intero. Qual è il più grande valore possibile di a.

---

5. Frazioni apparenti. **30 punti**

Dire quanti sono i numeri interi x tali che la frazione $\frac{-6}{x+1}$ è un numero intero.

---

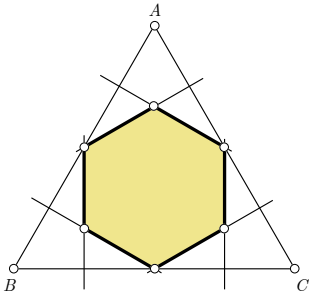
6. Funzioni intrecciate. **30 punti**

Siano f e g due funzioni tali che $f(x)=g(2x)$ e $g(x)=2f(x)$ per tutti i numeri reali x. Sapendo che $g(2)=3$, determinare $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

---

7. Esagono. **30 punti**

Un triangolo equilatero ha area $2\sqrt{3}$. Dal punto medio di ogni lato si traccino le rette perpendicolari agli altri due lati. Determinare l'area dell'esagono formato da queste sei rette.



---

8. Numeri speciali. **30 punti**

Un numero intero è detto *speciale* se le sue cifre, lette da sinistra a destra, sono strettamente crescenti. Quanti sono i numeri interi speciali di 6 cifre ?

---

9. Differenze di $\cdots$ quadrati. **40 punti**

Dire quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 2009 (inclusi gli estremi) che possono essere espressi come differenze dei quadrati di due numeri interi.

---

10. Polinomio a coefficienti interi. **40 punti**

Sia $Q(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $Q(9)=2009$. Se p è un numero primo tale che $Q(p)=392$, quanto vale p ?

---

11. Squadra olimpica. **40 punti**

Per formare la squadra che rappresenterà il liceo scientifico ai giochi a squadre di Matelandia sono stati selezionati 8 studenti: due alunni del biennio, due alunne del biennio, due alunni del triennio e due alunne del triennio. La squadra ufficiale deve essere formata da quattro studenti e devono essere rispettati i seguenti vincoli: devono far parte della squadra due studenti del biennio, due del triennio, due ragazzi e due ragazze. Dire in quanti modi si può formare la squadra ufficiale.

12. Parallelepipedo con dimensioni intere. **40 punti**

Le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo sono espresse da numeri interi. Sapendo che il volume del parallelepipedo è 2008 cm^3, qual è il minimo valore della sua superficie, espressa in cm^2 ?

---

13. Equazione con i moduli. **40 punti**

Si definisce valore assoluto di un numero reale a la quantità: $|a| = a$ se $a \geq 0$ e $|a| = -a$, se $a < 0$. Determinare il più grande numero reale x che verifica l'equazione

$$|||||x - 1| - 2| - 3| - 4| - 5| = 0$$

---

14. Viaggio di lavoro. **40 punti**

Domenico si reca al posto di lavoro alla velocità media di 75 Km/h ed arriva un minuto prima. Il giorno seguente, a causa di un maggior traffico, viaggia alla velocità media di 70 Km/h ed arriva un minuto dopo. Dire a quanti Km di distanza si trova il posto di lavoro.

---

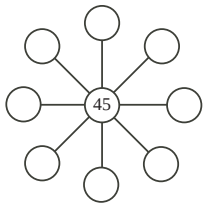
15. Numeri particolari. **50 punti**

Dire quanti sono i numeri interi di quattro cifre, compresi tra 5000 e 6000 tali che la cifra delle migliaia è uguale alla somma delle altre tre cifre.

---

16. Una somma massima. **50 punti**

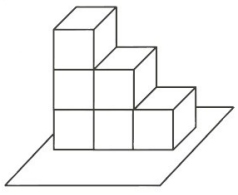
Numeri interi positivi distinti possono essere scritti negli otto cerchi vuoti della figura accanto, in modo che il prodotto dei tre numeri su una linea sia uguale a 3240. Qual è la più grande somma possibile degli otto numeri che circondano 45?



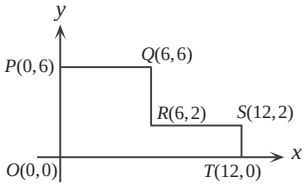
---

17. Muro di ... dadi. **60 punti**

Sei dadi sono disposti come indicato in figura. Su ogni dado i numeri 1 e 6 si trovano su due facce opposte, i numeri 2 e 5 si trovano su due facce opposte, i numeri 3 e 4 si trovano su due facce opposte. Qual è la massima somma possibile dei numeri scritti sulle 21 facce visibili ?



---

18. Tre aree uguali. **60 punti**

Nella figura a lato sono tracciate due rette passanti per $O(0,0)$ che dividono il poligono $OPQRST$ in tre parti aventi la stessa area. La somma dei coefficienti angolari delle due rette è espressa dalla frazione $\frac{a}{b}$ (ridotta ai minimi termini), con a, b numeri interi positivi. Determinare il valore di $a + b$.