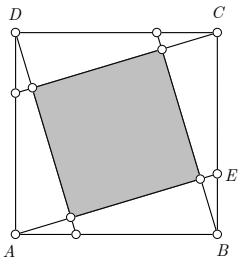
Liceo Scientifico "A.Einstein", Teramo
II Gara a Squadre

17 novembre 2011 Durata: 90 minuti

1. Quadrato & quadrato. **20 punti**



Sul lato BC del quadrato $ABCD$ di lato 10 si prenda un punto E tale che $BE = 3$. Detta S l'area del quadrato ombreggiato rappresentato in figura determinare il valore di $109S$.

2. Un problema di massimo. **20 punti**

Determinare il massimo valore assunto dall'espressione $x^2(9 - x)$ per $0 \leq x \leq 9$.

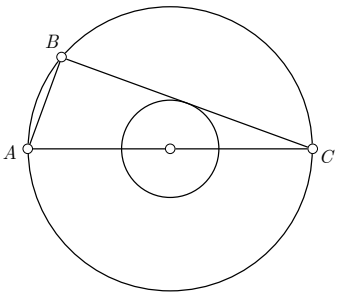
3. Numerosi divisori. **20 punti**

Dire quanti sono i divisori positivi del numero 73950800.

4. Problema di base. **20 punti**

Nel sistema di numerazione in base b i numeri $(123)_b$, $(140)_b$ e $(156)_b$ formano una progressione aritmetica. Determinare b.

5. Cerchi concentrici. **20 punti**



Il rapporto dei raggi di due cerchi concentrici è 1 : 3. Sia AC è un diametro del cerchio più grande, sia BC è una corda del cerchio più grande tangente al cerchio più piccolo e $AB = 12$. Calcolare il raggio del cerchio più grande.

6. Una questione di rapporti. **20 punti**

Dette α, β, γ le radici del polinomio $210x^3 - 107x^2 + 18x - 1 = 0$ determinare il valore di

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

7. International meeting. **20 punti**

In quanti modi 3 francesi, 3 italiani e 4 tedeschi possono sedersi intorno a un tavolo circolare con la condizione che persone della stessa nazionalità siano sedute vicine.

8. Ancora potenze! **30 punti**

Dire per quale valore di n il numero $2^6 + 2^9 + 2^n$ è il quadrato di un intero.

9. Cerchi congruenti. **30 punti**

In un triangolo ABC sia D un punto del lato BC tale che $BD = 14$, $AD = 13$, $DC = 4$. Sapendo che i raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli ADB e ADC sono congruenti, trovare l'area di ABC.

10. Una somma estrema ... **20 punti**

Calcolare la somma

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

11. Un conteggio classico. **30 punti**

Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$7a + b + c + d = 18$$

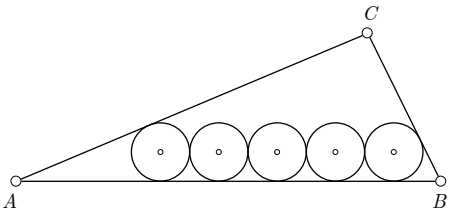
con a, b, c, d interi non negativi.

12. A scuola da ... Diofanto! **30 punti**

Quante sono le coppie (a, b) di interi positivi tali che $ab - 3a - 2b = 6$?

13. Catena di cerchi. **40 punti**

Nel triangolo ABC di lati $AB = 44$, $BC = 17$, $AC = 39$ sono disegnate cinque circonferenze aventi lo stesso raggio x, come in figura. Determinare x.



14. Un anno ... fissato. **40 punti**

Sia $f(x)$ un polinomio di grado 2010 tale che

$$f(k) = \frac{k}{k+1}, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, 2010\}$$

Dopo aver espresso $f(2011)$ nella forma m/n (ridotta ai minimi termini) dire quanto vale $m + n$.

15. Numeri originali. **40 punti**

Un numero naturale si dice *originale* se ha la cifra delle decine pari e quella delle unità dispari. Quanti sono i numeri *originali* n con cifre tutte distinte, tali che $99 < n < 2011$.

16. Un numero particolare. **40 punti**

Trovare un numero di quattro cifre $\overline{abcd}$ multiplo di 11 tale che il numero di due cifre $\overline{ac}$ sia multiplo di 7 e $a + b + c + d = d^2$.

(⋆) Con la partecipazione alla gara ciascuno studente sottintende il consenso per la pubblicazione su Internet delle foto e dei risultati conseguiti.

(⋆) I problemi sono stati redatti da Rosanna Tupitti ed Ercole Suppa `http://www.rotupitti.it/`