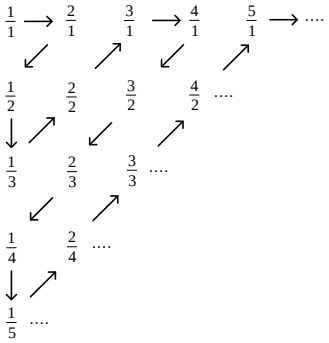
Allenamento tematico
Combinatoria e Teoria dei numeri

20 febbraio 2015

1. Nella dimostrazione che l'insieme dei numeri razionali positivi $\mathbb{Q}_0^+$ è numerabile, Cantor usò il seguente argomento diagonale. Dalla figura qui riprodotta si può facilmente ordinare l'insieme delle frazioni: la frazione $1/1$ occupa il primo posto, quella $2/1$ il secondo, $1/2$ il terzo e così via (naturalmente non tutte sono ridotte ai minimi termini). Qual è la 2015-esima frazione? Indicare come risultato la somma $m+n$ di tale frazione una volta ridotta ai minimi termini m/n.



$R = 32$

2. Qual è il più grande intero positivo n tale che $n+5$ divide n^3+666 ? $R = 536$

3. Trova il numero di terne ordinate (A, B, C) tali che:

   - $A, B, C \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$,
   - $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 2$,
   - $|A| = |B| = |C| = 4$.

   Esprimere il risultato indicando le prime quattro cifre da sinistra. $R = 4536$

4. Trovare il più piccolo intero $n > 5$ che diviso per 9, per 11, per 13 e per 15 dà sempre come resto 5. $R = 6440$

5. Vi sono 10 persone che vogliono scegliere una commissione formata da 5 membri scelti fra loro. Essi formano la commissione scegliendo dapprima un insieme formato da 1, 2, 3 oppure 4 leader i quali, a loro volta scelgono tra le rimanenti persone in modo da completare la commissione. In quanti modi può essere formata la commissione? (Due commissioni che hanno gli stessi membri, ma differenti insiemi di leader sono considerate distinte) $R = 7560$

6. Una banda di 17 pirati ha rubato un sacco di monete d'oro. Essi cercano di dividere le monete uguali, ma ne avanzano 3. Nel decidere su chi dovrebbe prendere le monete extra nasce una rissa e un pirata viene ucciso. Le monete vengono ridistribuite in parti uguali e questa volta ne avanzano 10. Si sviluppa una nuova rissa e viene ucciso un altro pirata. A questo punto le monete vengono distribuite in parti uguali tra i sopravvissuti. Qual è il minor numero di monete che i pirati potrebbero aver rubato? $R = 3930$

7. Quante sono le terne ordinate (a, b, c) di interi non negativi che soddisfano la disuguaglianza

$$a + b + c \leq 35$$

$R = 8436$

8. Un numero intero positivo x è detto *automorfo* se $x^2 - x$ è divisibile per 1000. Calcolare la somma di tutti i numeri automorfi di tre cifre. $R = 1001$

9. Quanti sono gli anagrammi della parola $CARNEVALE$ in cui non compaiono le due A vicine. Esprimere il risultato indicando le prime quattro cifre da sinistra. $R = 7056$

10. Dire quanti sono i numeri naturali inferiori a 1000000 il cui prodotto delle cifre è 81. $R = 161$

11. Un numero intero n è detto *elegante* se esistono due interi positivi a, b tali che $n = a^2 + b^3$. Dire quanti sono i numeri compresi tra 1 e 100 che sono pari oppure eleganti. $R = 63$

12. Uno studente di ritorno dall'Europa cambia in dollari una somma di denaro formata da euro e franchi svizzeri. All'ufficio di cambio egli riceve 1,39 dollari per ogni euro e 0,91 dollari per ogni franco svizzero. Se ha ricevuto complessivamente 46,58 dollari determinare la somma del numero di euro e del numero di franchi che gli sono stati cambiati. $R = 38$

13. Trovare il più piccolo numero intero positivo avente 14 divisori. $R = 192$

14. Sia S l'insieme delle coppie (x, y) di interi positivi tali che

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$$

Determinare la somma delle coordinate di tutti gli elementi di S. $R = 1076$

15. Quanti sono i numeri di 4 cifre che sono multipli di 3 ed hanno almeno una delle cifre uguale a 6.

$R = 1056$

16. Quante sono le coppie di interi positivi (x, y) tali che

$$x^2 - y^2 = 400^2$$

$R = 17$

17. In quanti modi possiamo collocare 4 palline rosse e 4 palline nere in una tabella 4×4

- in modo che in ogni casella vi sia una sola pallina;
- in ogni riga e in ogni colonna vi sia esattamente una pallina di ciascun colore.

$R = 216$

18. Siano x, y due numeri interi positivi tali che

$$16x^2y^2 + x^2 + y^2 + 160 = 8x + 8y + 94xy$$

Determinare $x^3 + y^3$. $R = 28$

19. Un dado a forma di poliedro regolare è tale che, lanciandolo 4 volte, la probabilità di ottenere 10 (come somma) è compresa tra $0,01$ e $0,05$. Qual è con tale dado la probabilità di ottenere 9 (come somma) lanciandolo 4 volte? (Si risponda con $m+n$ ove m/n è la frazione ridotta ai minimi termini che esprime tale probabilità).
$R = 519$

20. Nell'ufficio postale di un piccolo paese sono rimasti solo francobolli di due valori. Vi sono esattamente 33 valori postali che non possono essere ottenuti utilizzando questi francobolli, e tra questi vi è il valore di 46 centesimi. Trovare la somma dei valori dei due tipi di francobolli disponibili.

$R = 19$

(⋆) I problemi sono stati redatti da Rosanna Tupitti e Ercole Suppa.
I problemi n. 1,10,19 sono stati proposti dal prof. Gianluca Ippoliti.