

# Soluzioni per la Coppa Gauss 2018



*Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara, in particolare: Sandro Campigotto, Andrea Damonte, Veronica Grieco, Simone Muselli, Lorenzo Pollani, Damiano Poletti, Alberto Saracco, Silvia Sconza, Simone Traverso.*

**Soluzione del problema 1.** Dato un numero  $x$  maggiore di 2, i casi sono due: è pari o dispari. Nel primo caso il più piccolo fattore primo di  $x$  è 2, quindi al passo (iv) si otterrà  $2^2 - 1 = 3$  primo. Nel secondo caso,  $x$  avrà solo fattori primi dispari, sia  $a$  il più piccolo tra questi. Ma  $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$  è un numero pari divisibile per 4. Quindi ricominciando il ciclo, si ricade nel primo caso e si ottiene nuovamente 3. Questo vale per ogni numero maggiore di 2 e risolve il problema.

La risposta è 0003.

**Soluzione del problema 2.** Evidentemente ogni colonna è indipendente. Analizziamo quindi una colonna generica. Supponiamo che uno spettatore in fila **A** dica la verità. Allora in particolare quello dietro di lui mente. Dunque quello in fila **C** ha detto la verità, in contraddizione con l'affermazione dello spettatore in fila **A**. Dunque lo spettatore in fila **A** mente, così quello in fila **B** dice il vero, quindi quello in fila **C** mente, e così via. . . Procedendo in questo modo troviamo che la distribuzione di onesti e bugiardi in ogni colonna risulta unica: quelli nelle file dispari sono bugiardi, mentre quelli nelle file pari dicono la verità: 5 bugiardi per ogni colonna, quindi 50 bugiardi in totale.

La risposta è 0050.

**Soluzione del problema 3.** Aprile e maggio sono 61 giorni consecutivi. Dunque i tre giorni della gita possono essere scelti in 59 modi diversi. Il produttore farà in modo che queste 59 triple non contengano il giorno 12 maggio, dunque quelle possibili sono  $59 - 3 = 56$ . Tra queste quelle incompatibili con il 21 maggio sono  $56 - 3 = 53$  (nessuna di queste coinvolge il 12 maggio). Dunque la probabilità richiesta è  $\frac{53}{56}$ .

La risposta è 0109.

**Soluzione del problema 4.** Sia  $g(x) = f(2x)$ . Così  $g(0) = 0$  e

$$g(x) - g(x - 1) = f(2x) - f(2(x - 1)) = f(2x) - f(2x - 2) = \frac{2}{5}x - 200.$$

Dunque

$$\begin{aligned} f(2018) &= g(1009) \\ &= \sum_{k=1}^{1009} (g(k) - g(k - 1)) + g(0) \\ &= \sum_{k=1}^{1009} \left( \frac{2k}{5} - 200 \right) \\ &= \frac{2}{5} \binom{1010}{2} - 200 \cdot 1009 = 2018. \end{aligned}$$

La risposta è 2018.

**Soluzione del problema 5.** Dato che il pane è uniforme, la sua densità è costante. Ai fini della soluzione, dato che la lievitazione agisce uniformemente sull'impasto, possiamo valutare unicamente la variazione di volume a cui è sottoposto  $1 \text{ Kg} - 9 \text{ hg} = 1 \text{ hg}$  di massa iniziale della pasta, che è la quantità che rimane alla fine, cioè un decimo del volume iniziale. Ciò coincide a un decimo del suo volume iniziale. Tale volume è  $V_0$ . Dopo la  $n$ -esima lievitazione, il volume è

$$V_n = (1 + 1/n)V_{n-1} = \frac{n+1}{n}V_{n-1}.$$

Dunque

$$V_n = (n + 1)V_0.$$

Dunque dopo la decima lievitazione il volume della pasta rimasta è  $11V_0$ , ovvero

$$\frac{11}{10} \cdot 1 \text{ dm}^3 = 1100 \text{ cm}^3$$

La risposta è 1100.

**Soluzione del problema 6.** Siano  $x$  il numero di concorrenti con il cartoncino verde. Dato che qualche concorrente ha ricevuto il peperoncino, deve essere  $x \geq 587$ . Chi ha un cartoncino rosso, vede  $x$  concorrenti con il cartoncino verde. Chi ha il cartoncino verde, vede  $x - 1$  concorrenti con il cartoncino verde. Devono essere questi che hanno ricevuto la soia e  $x - 1 < 587$ , cioè  $x \leq 587$  da cui  $x = 587$  e  $2018 - 587 = 1431$ . La risposta è 1431.

**Soluzione del problema 7.** Dato che  $|s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 - s_2)^2}$  e

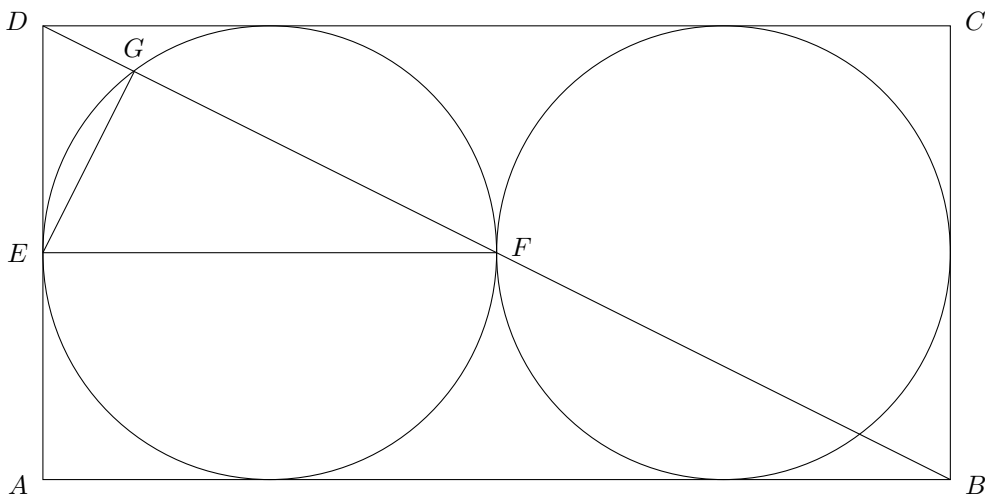
$$(s_1 - s_2)^2 = (s_1 + s_2)^2 - 4s_1s_2 = \left(\frac{153}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1368 = \frac{1521}{4} = \left(\frac{39}{2}\right)^2$$

si devono sommare i semi-interi tra  $\frac{39}{2}$  e  $76 = \frac{152}{2}$ , estremi inclusi. Perciò la somma è

$$\frac{1}{2} \left[ \binom{153}{2} - \binom{39}{2} \right] = \frac{1}{2} (11628 - 741) = 5443.5.$$

La risposta è 5443.

**Soluzione del problema 8.** Siano  $2h = 30$  m la lunghezza di  $AD$  e  $4h$  quella di  $AB$ . Il punto  $F$  di tangenza delle due circonferenze coincide con il centro del rettangolo.



I triangoli  $DEF$  e  $EGF$  sono simili. Dunque  $EF : DF = FG : EF$ . Perciò

$$FG = \frac{4h^2}{h\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}h = \frac{4}{\sqrt{5}}15 \text{ m} \approx 2683 \text{ cm}.$$

La risposta è 2683.

**Soluzione del problema 9.** Le ricette che si possono fare con  $s$  ingredienti sapidi e  $d$  ingredienti dolci sono  $\binom{4}{s} \cdot \binom{3}{s} \cdot \binom{3}{d} \cdot \binom{2}{d}$ . Dato che  $0 \leq s \leq 3$ ,  $0 \leq d \leq 2$  e  $s + d \geq 0$ , i casi da

valutare sono 11:

$s$	$d$	$\binom{4}{s} \cdot \binom{3}{s} \cdot \binom{3}{d} \cdot \binom{2}{d}$
1	0	12
2	0	18
3	0	4
0	1	6
1	1	72
2	1	108
3	1	24
0	2	3
1	2	36
2	2	54
3	2	12
totale		349

La risposta è 0349.

**Soluzione del problema 10.** Dato che i tre numeri devono essere diversi, fissiamo  $a = 99 = 11 \cdot 3^2$ ,  $b = 98 = 2 \cdot 7^2$  e vediamo che  $c$  si può trovare. Dato che  $a \cdot b \cdot c$  è un quadrato perfetto, la fattorizzazione prima di  $c$  deve contenere almeno le copie dei fattori mancanti in  $a \cdot b$ : 11 e 2. Dunque si può usare un multiplo di  $2 \cdot 11 = 22$  della forma  $22k^2$ . Si vede subito che l'unico tale multiplo è  $88 = 22 \cdot 2^2$ . E  $\sqrt{11 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 2^2} = 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 = 924$ . Migliorare il risultato evitando il fattore 99 oppure il fattore 98 è impossibile. Usando soltanto il fattore 99 è necessario utilizzare un altro fattore multiplo di 11 che non sia 88, ma questo è impossibile. Usando soltanto il fattore 98, il migliore fattore restante è  $96 = 2^5 \cdot 3$ , ma il fattore 3 peggiora la ricerca del terzo fattore della forma  $3k^2$ . Dato che 97 è primo,  $95 = 5 \cdot 19$  e  $94 = 2 \cdot 47$  si controlla immediatamente che il risultato non può essere migliorato.

La risposta è 0924.

**Soluzione del problema 11.** Bisogna notare che  $x^8 + 31x^4 + 256 = x^8 + (2^5 - 1)x^4 + 2^8$ . Così

$$\begin{aligned} x^8 + 31x^4 + 256 &= x^8 + (2^5 - 1)x^4 + 2^8 = x^8 + 2 \cdot 2^4x^4 + 2^8 - x^4 = (x^4 + 2^4)^2 - x^4 \\ &= (x^4 + 2^4 + x^2)(x^4 + 2^4 - x^2) \\ &= (x^4 + 2 \cdot 2^2x^2 + 2^4 - 7x^2)(x^4 + 2 \cdot 2^2x^2 + 2^4 - 9x^2) \\ &= [(x^2 + 2^2)^2 - 7x^2][(x^2 + 2^2)^2 - 9x^2] \\ &= (x^2 + 2^2 + \sqrt{7}x)(x^2 + 2^2 - \sqrt{7}x)(x^2 + 2^2 + 3x)(x^2 + 2^2 - 3x) \end{aligned}$$

I valori cercati sono: 1, 4,  $\sqrt{7}$ , 1, 4,  $\sqrt{7}$ , 1, 4, 3, 1, 4, 3. La risposta si ottiene  $\frac{4^4 \cdot 3^2 \cdot 7}{100} = 161.28$ . La risposta è 0161.

**Soluzione del problema 12.** Sia  $n$  il numero estratto da Ludovico. Emanuele viene eliminato se estrae due numeri  $x$  e  $y$  (necessariamente diversi) tali che  $2n = x + y$ . Estratto  $x$ , restano 99 possibilità per l'estrazione di  $y$ . Di queste quelle con la stessa parità sono 49. La probabilità che  $x$  e  $y$  abbiano la stessa parità e  $n$  sia la media di  $x$  e  $y$  è

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{9900}.$$

La risposta è 9949.

**Soluzione del problema 13.** La somma delle pagine del capitolo  $k$  è  $15 \cdot 7 + 14 \cdot 14(k - 1) = 7 \cdot [28(k - 1) + 15]$ . Perciò, se  $x$  è il numero del capitolo strappato, deve essere

$$168 \cdot 337 = 53571 + 7 \cdot [28(x - 1) + 15].$$

Dunque  $x = 16$ . La prima pagina è  $15 \cdot 14 + 1 = 221$ .

La risposta è 0221.

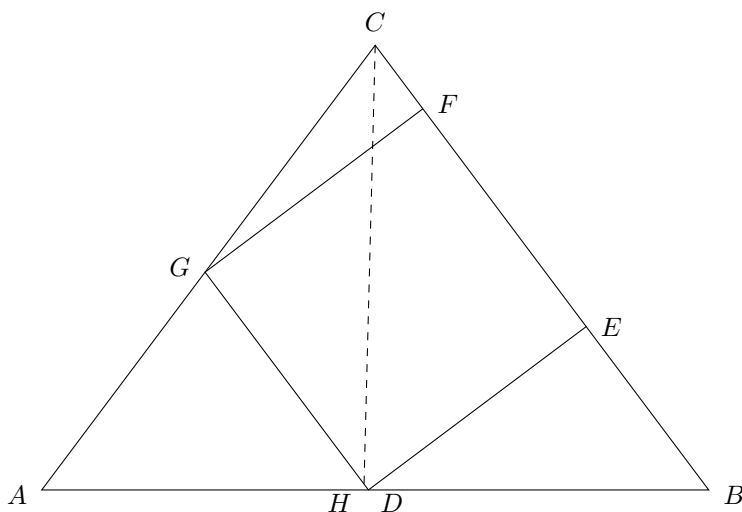
**Soluzione del problema 14.** la richiesta equivale a determinare la probabilità che il numero estratto da Emanuele sia strettamente maggiore di un numero estratto dall'insieme  $S$  delle possibili somme di due numeri in  $C$ , ovvero  $S = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  con l'accortezza che  $\mathbb{P}(S = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  perchè si può ottenere sommando 1 e 4 oppure 2 e 3—mentre per ogni altro  $x$  in  $S$  è  $\mathbb{P}(S = x) = \frac{1}{6}$ .

Indicando con  $a$  e  $b$  i numeri estratti rispettivamente da Emanuele e la somma estratta da Ludovico, per la formula della probabilità totale si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a > b) &= \sum_{k=3}^7 \mathbb{P}(a > b \mid b = k) \mathbb{P}(b = k) \\ &= \sum_{k=3}^7 \mathbb{P}(a > k) \mathbb{P}(b = k) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{5}{54} + \frac{4}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

La risposta è 0013.

**Soluzione del problema 15.** Siano  $a$  la lunghezza del lato obliquo,  $b$  la lunghezza della base e  $h$  la lunghezza dell'altezza  $CH$  del triangolo  $ABC$ . Dunque  $a = \sqrt{h^2 + (\frac{b}{2})^2}$ . Sia  $d$  la lunghezza del lato del quadrato cercato  $DEFG$ , sia  $c$  la lunghezza del segmento  $AD$ . I triangoli  $ABC$  e  $ADG$  sono simili così come i triangoli  $AHC$  e  $BEH$ .



Di conseguenza,  $d : c = a : b$  e  $(b - c) : d = a : h$ , cioè

$$\begin{cases} bd - ac = 0 \\ ad + hc = hb \end{cases}$$

che, risolvendo, dà  $d = \frac{abh}{a^2 + bh} = 120 \text{ mm} = 12 \text{ cm}$ —e  $c = \frac{bd}{a} = 144 \text{ mm}$ .

La risposta è 0144.

**Soluzione del problema 16.** Le radici del polinomio  $q(x) := p(x) - x^2$  sono 1, 2, 3 e 4. Per il teorema di Ruffini

$$q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

Dunque  $p(5) = q(5) + 25 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 25 = 49$ .

La risposta è 0049.

**Soluzione del problema 17.** Si fissi in  $(0, 0)$  il punto di partenza, le uniche posizioni a 10 metri raggiungibili sono  $(10, 0)$  e i relativi simmetrici negli altri tre quadranti,  $(8, 6)$  e i relativi simmetrici negli altri sette ottanti.

Caso  $(10, 0)$ , cioè 5 spostamenti da due metri verso Est e 4 che si annullano a 2 a 2: la sequenza non ordinata di 4 spostamenti può essere NNSS, EONS oppure EEEO. Gli anagrammi di

EEEEENNSS sono  $\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 5!} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$ ; gli anagrammi di EEEEEONS sono  $\frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7$ ;

gli anagrammi di EEEEEEOO sono  $\frac{9!}{2! \cdot 7!} = 9 \cdot 4$ .

Caso (8, 6), cioè 4 spostamenti verso Est, 3 verso Nord e una coppia di spostamenti che si annullano: la sequenza non ordinata di 2 spostamenti che si annullano può essere NS oppure

EO. Gli anagrammi di EEEENNNS sono  $\frac{9!}{4! \cdot 4!} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5$ ; gli anagrammi di EEEEEONNN

sono  $\frac{9!}{5! \cdot 3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7$ .

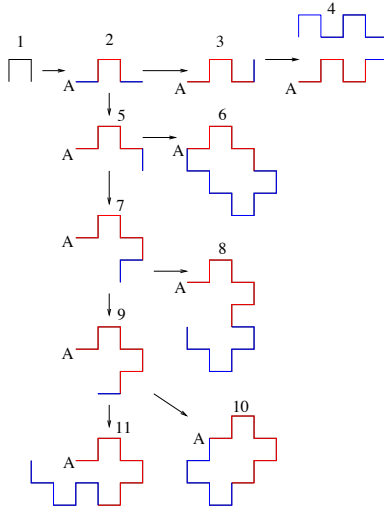
La probabilità richiesta è

$$4 \cdot \frac{9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 4 + 2 \cdot (9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 7)}{4^9} =$$

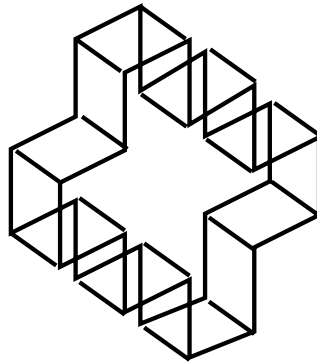
$$= 4 \cdot \frac{9 \cdot 4 \cdot 7(3 + 2 + 5 + 4) + 9 \cdot 4}{4^9} = 4 \cdot \frac{9 \cdot 4(98 + 1)}{4^9} = \frac{891}{4^7}.$$

La risposta è 0891.

**Soluzione del problema 18.** Dato che uno snodo tiene tre bastoncini in posizioni ortogonali e la dimensione minima della scatola coincide con la lunghezza dei bastoncini, una serie di bastoncini, diciamo in direzione  $Z$ , sono paralleli alla dimensione minima della scatola. Gli altri, diciamo  $X$  e  $Y$ , tra loro ortogonali e ortogonali ai bastoncini  $Z$  stanno su due piani paralleli, a distanza 10 cm, poiché la struttura è contenuta in un parallelepipedo retto. Dato che ci sono 32 snodi, ci sono 16 bastoncini  $X$ , 16 bastoncini  $Y$  e 16 bastoncini  $Z$  poiché ad ogni bastoncino corrispondono due snodi e da ogni snodo partono 3 bastoncini, uno per tipo. La figura costituita dai bastoncini  $X$  e  $Y$  su un piano è uguale alla figura ottenuta dai bastoncini  $X$  e  $Y$  sull'altro piano ed è un cammino chiuso, fatto da 8 bastoncini  $X$  e 8 bastoncini  $Y$  che si incontrano negli estremi e sono sistemati in modo alterno. Si tratta ora di capire come sono fatte queste parti di struttura. Fissiamo l'attenzione su un piano. Certamente potremmo isolare due bastoncini  $Y$  e un bastoncino  $X$  come in 1 della figura allegata ( $X$  è il bastoncino orizzontale,  $Y$  i due bastoncini verticali). Allora necessariamente dai due estremi liberi dei bastoncini  $Y$  devono partire due bastoncini  $X$  come in 2. Ora distinguiamo due casi: dall'estremo libero del bastoncino  $X$  di destra di 2 parte un bastoncino  $Y$  verso l'alto (come in 3) o verso il basso (come in 5). Nel caso 3 le scelte successive sono tutte forzate: il bastoncino successivo che si lega a  $Y$  deve andare verso destra, allora il successivo  $Y$  deve andare verso l'alto (non può andare verso il basso, perché ci siamo allontanati dal punto  $A$  con 4 bastoncini orizzontali e ora tutti i bastoncini orizzontali devono essere usati per tornare verso il punto  $A$ ), il bastoncino successivo (di tipo  $X$ ) deve andare verso sinistra, allora quello successivo deve andare verso l'alto e così via. Si ottiene la figura 4 che ha esaurito gli 8 bastoncini  $X$  e gli 8 bastoncini  $Y$  e non si è chiusa, quindi questa soluzione non va bene. Partiamo allora dal tratto di struttura raffigurata in 5. Il bastoncino  $Y$  di destra può essere completato in due modi: inserendo un bastoncino  $X$  che va verso destra (6) o verso sinistra (7). Nel caso 6 di nuovo le scelte sono obbligate e si ottiene una figura chiusa. Nel caso 7 il bastoncino successivo è forzato ad essere un bastoncino  $Y$  verso il basso. Poi ci sono ancora due possibili scelte, il caso 8 in cui la costruzione è obbligata e il caso 9 che ha due possibilità, una sola delle due (la 10) dà un cammino chiuso. In conclusione la possibile figura sul piano  $\pi_1$  è la 6 (o la 10, che sono uguali).



Analoga figura si deve trovare sull'altro piano; quindi la struttura è, a meno di rotazioni,



e la massima distanza tra due vertici della struttura è

$$\sqrt{400^2 + 200^2 + 100^2} = 100\sqrt{21} \approx 458.2576.$$

La risposta è 0458.

**Soluzione del problema 19.** Le somme di facce opposte possono essere: 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Con somma 7 e con somma 8, le coppie di numeri possibili sono solo 3: (1, 6), (2, 5) e (3, 4) nel primo caso; (1, 7), (2, 6) e (3, 5) nel secondo caso. Si può sempre fare in modo che 1 sia sulla faccia inferiore e 2 sulla faccia anteriore. A questo punto ci sono 2 possibilità per il 3. Gli altri numeri sono univocamente determinati.

Con somma 9, con somma 10 e con somma 11 ci sono quattro coppie possibili: (1, 8), (2, 7), (3, 6) e (4, 5) nel primo caso; (1, 9), (2, 9), (3, 7) e (4, 6) nel secondo caso; (2, 9), (3, 9), (4, 7) e (5, 6) nel terzo caso. Si scelgono 3 coppie in 4 modi possibili, poi le disposizioni sono come in precedenza. In ciascun caso sono 8 in totale.

Con somma 12 e con somma 13 ci sono tre coppie possibili. Dunque ancora 2 possibili dadi in ciascun caso.

I dadi costruibili sono  $2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 2 + 2 = 32$ .

La risposta è 0032.

**Soluzione del problema 20.** Contiamo i pareggi: per pareggiare, dato che i colori sono tre, necessariamente devono estrarre lo stesso numero  $n$  di fagioli per un certo colore, diciamo rosso. Bisogna ora soltanto determinare in quanti modi ciascuno può estrarre fagioli di un altro colore, diciamo verde:  $(10 - n)^2$ . I casi di coppie di colori diversi sono  $3 \cdot 2$ . Però si sono

contati tre volte i casi in cui i fagioli sono in numero uguale per tutti e tre i colori (non ci sono casi con fagioli in numero uguale per esattamente due colori): questi sono tanti quante le coppie di numeri naturali  $(a, b)$  tali che  $a + b \leq 10$ , cioè  $\binom{11}{2}$ . Perciò i pareggi sono

$$3(10^1 + 9^2 + \dots + 1^2) - 2 \cdot \binom{11}{2} = 3 \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \binom{11}{2} = 1155 - 110$$

Dato che i sorteggi possibili sono  $\binom{11}{2}$ , la probabilità di vittoria per Ludovico è

$$\frac{1}{2} \frac{55^2 - 1045}{55^2} = \frac{55^2 - 55 \cdot 19}{55^2 \cdot 2} = \frac{18}{55}$$

La risposta è 0073.

**Soluzione del problema 21.** Per risolvere il problema bisogna considerare i vari casi possibili: il numero massimo di centri che Emanuele può aver fatto è 10, il minimo 3; Veronica può aver fatto al massimo 7 centri, al minimo 0. Si vede subito che non è possibile ottenere risultati uguali con una serie da 3 centri e una da 0, né con una serie da 4 e una serie da 1, né con una serie da 5 e una serie da 2. Per gli altri casi si preparano due tabelle:

	serie migliore	punteggio		serie peggiore	punteggio
3 centri	3	6	6 centri	2+1+1+1+1	7
4 centri	4	10	7 centri	2+2+2+1	10
5 centri	5	15	8 centri	3+3+2	15
6 centri	6	21	9 centri	5+4	25
7 centri	7	28	10 centri	10	55

Si osserva che solo quando Emanuele fa 8 e 7 centri e Veronica rispettivamente 5 e 4, il punteggio massimo ottenuto da Veronica è maggiore o uguale a quello minimo ottenuto da Emanuele. Ciò significa che i due amici possono aver totalizzato un punteggio di 15 o 10 punti. Dunque la risposta è 1015.

La risposta è 1015.

**Soluzione del problema 22.** Sia  $n = a10^3 + b10^2 + c10 + d$ . Si noti che (3) e (4) non possono avere lo stesso valore.

Supponiamo che (3) sia vera. Ne segue che  $a+b+c+d < 9$ , (2) è vera, ma inutile, (4) è falsa, (1) è vera, e la prima parte di (6) è falsa. Restano (5) e (6) che non possono essere entrambe false, altrimenti le frasi false sarebbero tante quante quelle vere. Quando (6) è vera, se (5) è vera, allora  $d = 4$ ,  $n < 2018$  e  $5|n$ : assurdo; se (5) è falsa, allora  $d \neq 4$ ,  $n < 2018$  e  $4|n$ . Quando (6) è falsa, allora  $n \geq 2018$  e (5) è vera, così  $d = 4$  e  $4|n$ . Il minimo  $n$  tra quelli che verificano una delle due possibilità è  $n = 8$ , il massimo è  $n = 4004$ .

Supponiamo che (3) sia falsa; i casi sono due: non tutte le frasi precedenti sono vere;  $a + b + c + d \geq 9$ . In ogni caso, (4) deve essere vera, altrimenti le frasi vere sarebbero meno di quelle false. Di conseguenza (5) e (6) devono essere vere, ma la prima condizione in (6) è falsa. Perciò,  $n < 2018$  e  $d = 1, 2, 3$  a seconda dei casi.

Calcolare il massimo è inutile perché è sicuramente minore di 2018, dunque minore anche di 4004. Per quanto riguarda il minimo, nel caso che  $a + b + c + d \geq 9$ , sarà  $n > 9 > 8$ ; nel caso che (1) sia vera (e (2) falsa),  $4|n$ ,  $d = 2$  e  $n = 12$ ; nel caso che (2) sia vera (e (1) falsa),  $d = 1$  e  $n = 11$ .

La risposta è 4012.

**Soluzione del problema 23.** Sia  $M$  la matrice scritta sulla torta. Sia  $Q_{n \times n}^{i,j}$  il quadrato in  $M$  di dimensione  $n$  con vertice alto a sinistra in  $(i, j)$ , con  $1 \leq i, j \leq 9 - n$ . È

$$Q^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} + (i+j-2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e  $s = n^3 + (i+j-2) \cdot n^2$ . In particolare  $S = 512$ .

La richiesta è pertanto di trovare i quadrati  $Q$  tali che  $s|512 = 2^9$ . La condizione diventa  $n^2(n+i+j-2)|2^9$ . Perciò deve essere in particolare  $n|2^4$  e  $(n+i+j-2)|2^9$ : i valori ammissibili per  $n$  sono 1, 2, 4, 8; i valori ammissibili per  $2 \leq i+j \leq 10-n$  sono

$n :$	1	2	4	8
$i+j :$	2	2	2	2
	3	4	6	
	5	8		
	9			

Se  $k \leq 8$ , i numeri tali che  $i+j = k+1$  con  $1 \leq i, j \leq 8$  sono  $k$ . Perciò in corrispondenza dei valori sopra si ottengono

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 4 + 7 + 8 = 33$$

quadrati che verificano la condizione richiesta.

La risposta è 0033.

**Soluzione del problema 24.** Prima di affrontare la soluzione, è utile un'osservazione generale sulla procedura. La successione di somma delle cifre è decrescente, ovvero  $a_{n+1} \leq a_n$  per ogni  $n$ ; in particolare,  $a_{n+1} = a_n$  se e solo se  $a_n$  è una cifra e da quel momento in poi la successione è costante, ovvero  $a_m = a_n$  se  $m \geq n$ . Dunque, dopo un certo numero di passi  $a_n$  sarà un numero di una cifra; chiamato  $S$  il numero di fagioli nel sacchetto in quel momento, quello che ci stiamo chiedendo è quindi che esistano due interi positivi  $k, h$  tali che

$$a_n k + S = 2365h, \tag{1}$$

con  $a_n$  numero di una cifra. L'equazione ha soluzione se e solo se  $\text{MCD}(a_n, 2365)|S$ . Scomponendo  $2365 = 5 \cdot 11 \cdot 43$  si osserva che, se la cifra  $a_n \neq 5$ , allora  $\text{MCD}(a_n, 2365) = 1$ ; quindi l'equazione ammette soluzione. Restano perciò da considerare quegli  $a_1$  tali che ad un certo punto la somma ripetuta delle cifre porta ad  $a_n = 5$ .

Iniziamo ora la soluzione valutando dopo quanti passi si ottiene un numero di una cifra. Si osservi che  $a_2 \leq 36$ . Se  $a_3$  non è una cifra, sicuramente  $a_4 < 5$ . Perciò interessano quelle successioni con  $a_3 = 5$ .

Supponiamo che  $a_2 = 5$ . Allora  $S = a_1 + 5$  e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se  $5|a_1$ . Contiamo gli  $a_1$  non divisibili per 5, cioè quegli  $a_1 = A10^3 + B10^2 + C10 + D$  tali che  $A + B + C + D = 5$  e  $D$  non è 0 e non è 5. Dato che  $5 < 10$ , gli  $a_1$  che verificano la prima condizione sono  $\binom{8}{3}$ , quelli con  $D = 0$  sono  $\binom{7}{2}$ , quelli con  $D = 5$  sono soltanto il numero 5. Gli  $a_1$  cercati sono perciò

$$\binom{8}{3} - \binom{7}{2} - 1 = 34.$$

Supponiamo che  $a_2 \neq 5$ . Poiché  $a_3 = 5$  ed  $a_2 \leq 36$ , si ha  $a_2 = 14, 23, 32$ . Trattiamo separatamente questi tre casi assumendo che  $a_1$  non sia multiplo di 2365, cioè  $a_1 \neq 2365, 4730, 7095, 9460$ . Consideriamo ancora  $a_1 = ABCD$  dove  $A, B, C, D$  sono le quattro cifre del numero forse 0.

Caso  $a_2 = 14$ : Allora  $S = a_1 + 14 + 5$  e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se  $5|a_1 + 14$ . Dobbiamo contare gli  $a_1$  con  $D \neq 1$  oppure  $D \neq 6$ . Sia  $D = 0$ . Se  $C = 0$  si hanno 5 casi tali che  $A + B = 14$ . Se  $C = 1$ , 6 casi tali che  $A + B = 13$ . Per  $C = 2$ , 7 casi tali che  $A + B = 12$ . Ci sono 10 casi tali che  $A + B = 9$  quando  $C = 5$ , ecc. In totale per  $D = 0$  si hanno

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 75$$

numeri con somma delle cifre 14. Anche se per ora non è richiesto calcoliamo anche il caso  $D = 1$ . Per lo stesso ragionamento si hanno

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 75 \quad \text{numeri.}$$

Si prosegue in questo modo per  $D = 2$ ,  $D = 3$  e  $D = 4$  ottenendo rispettivamente 73, 69 e 63. Per  $D = 5, 6, 7, 8, 9$  possiamo riusare la formula delle combinazioni con ripetizione ottenendo



rispettivamente 55, 45, 36, 28, 21. I numeri  $a_1$  minori di 10000 con somma delle cifre 14 e con  $D \neq 1$  e  $D \neq 6$  sono in totale

$$75 + 73 + 69 + 63 + 55 + 36 + 28 + 21 = 420.$$

Caso  $a_2 = 23$ : Allora  $S = a_1 + 23 + 5$  e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se  $5|a_1 + 23$ . Dobbiamo contare gli  $a_1$  con  $D \neq 2$  e  $D \neq 7$ . Sia  $\tilde{a}_1 = 9999 - a_1$  il complemento a 9 delle cifre  $ABCD$ : la somma delle cifre di  $\tilde{a}_1$  è  $36 - 23 = 13$ . Quindi il problema coincide con quello di contare gli  $\tilde{a}_1$  con somma 13 e con  $D \neq 9 - 2 = 7$  e  $D \neq 9 - 7 = 2$ . Sia  $D = 0$ : contare i numeri con somma delle cifre 13 che finiscono per 0 è come contare i numeri che hanno somma 14 e finiscono per 1, che abbiamo già contato! E questo vale per  $D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Manca solo da contare  $D = 9$  che però possiamo fare ancora una volta con la formula delle combinazioni con ripetizione ottenendo  $\binom{6}{2} = 15$ . Pertanto i numeri  $a_1$  con somma delle cifre 23 e con  $D \neq 2$  e  $D \neq 7$  sono

$$75 + 73 + 63 + 55 + 45 + 36 + 21 + 15 = 383.$$

Caso  $a_2 = 32$ : Dobbiamo contare gli  $a_1$  con  $D \neq 3$  e  $D \neq 8$ . Operiamo come prima e troviamo gli  $\tilde{a}_1$  con somma delle cifre 4 e  $D \neq 1$  oppure  $D \neq 6$ . Usando la formula delle combinazioni con ripetizione si ottengono subito

$$\binom{7}{3} - \binom{5}{2} - 0 = 25 \quad \text{numeri.}$$

Togliendo da tutti i numeri quelli che abbiamo osservato non andare bene si ottiene quindi

$$9999 - 34 - 420 - 383 - 25 = 9137.$$

Però non abbiamo finito. Abbiamo infatti assunto che  $a_1$  non fosse un multiplo di 2365. Chiaramente tutti questi numeri soddisfano la richiesta; è possibile che li abbiamo tolti? Noi infatti siamo andati subito a sommare le cifre, ma questi numeri funzionano all'inizio della procedura. Analizziamo quindi separatamente questi multipli. Se  $a_1 = 2365$  allora  $a_2 = 16$  e  $a_3 = 7$ : non è stato tolto. Se  $a_1 = 4730$  allora  $a_2 = 14$ : questo è stato tolto! Deve essere quindi aggiunto di nuovo. Se  $a_1 = 7095$ , allora  $a_2 = 21$  e  $a_3 = 3$ : non è stato tolto. Infine se  $a_1 = 9460$  allora  $a_2 = 19$ ,  $a_3 = 10$  e  $a_4 = 1$ : non è stato tolto.

Pertanto la risposta sarà  $9137 + 1 = 9138$ .

La risposta è **9138**.