# Soluzioni

*Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara. Insieme a Sandro Campigotto, Alessandro Logar, Edi Rosset e Alberto Saracco che hanno anche una grossa parte nell'organizzazione e gestione delle gare a squadre, sono stati un aiuto fondamentale: Rodolfo Assereto, Gabriele Balletti, Matteo Bobbio, Andrea Damonte, Mario De Simoni, Mattia Fecit, Veronica Grieco, Bruk Mohamed, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Cecilia Oliveri, Milo Orlich, Damiano Poletti, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso.*
*Sono tutti ex-giocatori che hanno svolto i loro studi universitari presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.*

**Soluzione del problema 1.** Sia $g$ il numero di ghirlande inizialmente nel cesto. La prima fata riceve $\frac{1}{20}g$ ghirlande e $g - \frac{1}{20}g = \frac{19}{20}g$ restano nel cesto. La seconda fata riceve $\frac{1}{19} \cdot \frac{19}{20}g = \frac{1}{20}g$ e restano nel cesto $\frac{19}{20}g - \frac{1}{20}g = \frac{18}{20}g$ ghirlande. Una facile induzione mostra che ad ogni passo il numero di ghirlande diminuisce di $\frac{1}{20}g$. Dopo 19 fate, Oberon riceve il ventesimo gruppo di $\frac{1}{20}g$ ghirlande e sono 10.

**Soluzione del problema 2.** Usando soltanto cifre 0 e 1 si possono scrivere $2^4 = 16$ numeri. In ciascuna delle quattro posizioni si trova 0 otto volte e 1 otto volte e, sommandoli, non ci sarà riporto.

**Soluzione del problema 3.** Gli angoli di un poligono regolare di $n$ lati hanno ampiezza $\pi\frac{n-2}{n}$. L'angolo $ABC$ ha ampiezza $\frac{\pi}{2}$, l'angolo $CBE$ ha ampiezza $\pi\frac{3}{5}$. L'angolo $ABE$ ha ampiezza $\pi[2 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{5})] = \pi\frac{9}{10} = \pi\frac{18}{20}$.

**Soluzione del problema 4.** Si noti che $a \triangle b$ è $a + \frac{1}{b}$ (e una sequenza $a_1 \triangle (a_2 \triangle (\ldots \triangle a_n) \ldots)$ con $a_i$ intero positivo, $i = 1, 2, \ldots, n$, è una scrittura parziale di una frazione continua). Quando $a = 1$ e $b = \frac{p}{q}$, il valore di $a \triangle b$ è $1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p}$. Così la sequenza proposta genera una successione di Fibonacci:

$$
\begin{aligned}
&1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (2 \triangle 2))))))) = \\
&\quad = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{5}{2}\right)\right)\right)\right)\right)\right) \\
&\quad = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{7}{5}\right)\right)\right)\right)\right) = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{12}{7}\right)\right)\right)\right) \\
&\quad = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{19}{12}\right)\right)\right) = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{31}{19}\right)\right) = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(\frac{50}{31}\right)\right) \\
&\quad = 1 \triangle \frac{81}{50} = \frac{131}{81}
\end{aligned}
$$

**Soluzione del problema 5.** Siano $a$ la lunghezza di $AE$, $b$ la lunghezza di $EB$. Sia $x$ la lunghezza di $DE$. I triangoli $ABC$, $AEF$ e $EBD$ sono simili. Perciò $a : b = \sqrt{a^2 - x^2} : x$, cioè

$$(a^2 + b^2)x^2 = a^2b^2.$$

Così $x^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

**Soluzione del problema 6.** Per verificare la prima regola, Fondo deve girare 5, 10, 15, 20 per vedere che dietro di esse vi sia effettivamente un pari e deve girare tutte le carte che non sono pari, cioè quelle con un numero dispari, per verificare che dietro di esse non vi sia un 5, un 10, un 15 o un 20. Per verificare la seconda regola, Fondo deve girare il 2—gli altri numeri primi li ha già girati perché sono dispari, quindi ha già visto qual è il numero dietro di loro—per verificare che dietro di esso vi sia una potenza con esponente dispari di 2. Deve anche girare il 4 e il 16 per verificare che dietro di essi non vi sia un numero primo. Per verificare la terza regola non serve girare ulteriori carte in quanto le potenze di 3 e 19 sono dispari. Per verificare l'ultima condizione, Fondo deve girare 8 e 12, che sono gli unici multipli di 4 che non sono ancora stati girati, e tutti i numeri strettamente minori di 7: l'unico da girare è il 6 in quanto gli altri sono già stati girati in precedenza.

**Soluzione del problema 7.** Innanzitutto per la prima condizione le cifre del numero possono essere solo: 2, 3, 5, 7. Si osservi che dopo la cifra 7 e la cifra 5 può esserci solo la cifra 3; dopo la cifra 3 può esserci solo la cifra 7 e dopo la cifra 2 può esserci solo la cifra 3. Quindi gli unici possibili candidati a quattro cifre sono: 7373, dove però si ha 737 che è divisibile per 11, 5373 dove però 537 è divisibile per 3, 3737 dove però 737 è divisibile per 11 e 2373 dove però 273 è divisibile per 3. Non ci sono quindi numeri di quattro cifre che rispettano le condizioni.
I possibili numeri a tre cifre sono gli stessi numeri del caso precedente senza l'ultima cifra.

**Soluzione del problema 8.** Siano $a = 12\,\text{cm}$ la lunghezza del cateto maggiore, $b = 5\,\text{cm}$ quella del cateto minore. I due solidi formati sono due coni $A$ e $B$ rispettivamente con raggio di base uno il cateto minore e l'altro il cateto maggiore. Perciò $\dfrac{V_A}{V_B} = \frac{ab^2}{a^2b} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{12}$.

**Soluzione del problema 9.** $5^{4007} \cdot 4^{2019} = 5^{4007} \cdot (2^2)^{2019} = (5 \cdot 2)^{4007} \cdot 2^{31} = 10^{4007} \cdot 2147483648$.

**Soluzione del problema 10.** Kael ripete il ciclo ogni 6 secondi, Kale ripete il ciclo ogni 8 secondi, quindi il ciclo delle due luci si ripete ogni $\text{mcm}(6, 8) = 24$ secondi e, in quei 24 secondi, le due luci rimangono contemporaneamente accese per 6 secondi. Un'ora e tre quarti sono 6300 secondi; poiché $6300 = 24 \cdot 262 + 12$, il ciclo dei due fari si ripete 262 volte. Inoltre nei restanti 12 secondi restano contemporaneamente accesi per ulteriori 5 secondi.

**Soluzione del problema 11.** Sia $p$ la probabilità che esca un numero pari. Osserviamo che qualunque sia l'esito delle prime tre estrazioni, il fatto che il numero completo sia o meno multiplo di 3 è totalmente stabilito dall'esito dell'ultimo lancio. Infatti, qualunque sia la somma dei primi 3 numeri ottenuti, per ottenere alla fine un multiplo di 3 si hanno chiaramente due soli esiti favorevoli, di cui uno pari e uno dispari. Quindi la probabilità che il numero completo sia multiplo di 3 è

$$\frac{p}{3} + \frac{1-p}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Soluzione del problema 12.** Di seguito la scacchiera dopo 9 passi:

$$\begin{matrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

In ogni quadrato di lato $2k + 1$ numeri (il valore assoluto del)la differenza tra due estremi di un lato orizzonale è $2k$. Perciò il $k$-esimo quadrato contribuisce alla differenza per $4k$ e il numero massimo nel quadrato è $(2k+1)^2$. Il valore richiesto in un quadrato di lato $n = 2k+1$ è

$$\sum_{i=1}^{k} 4i = 4\frac{k(k+1)}{2} = \frac{2k(2k+2)}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}.$$

E $2 \cdot 2019 + 1 = 4039$.

**Soluzione del problema 13.** Le sequenze in cui vince Fondo sono quelle in cui l'ultima rossa e l'ultima blu si trovano dopo l'ultima gialla. Le possibile sequenze si scrivono separando due casi:

**l'ultima rossa è dopo l'ultima blu** La sequenza sarà quindi del tipo "...G...B...R", dove G, B, R sono, in questo caso, l'ultima gialla, l'ultima blu e l'ultima rossa. Le altre palline gialle saranno prima di G e la sequenza sarà "...g...g...G...B...R", dove le g indicano palline gialle che non sono l'ultima. Le tre palline blu possono andare in tre dei quattro posti prima di B, l'ordine è irrilevante; ad esempio "...b...b...g...b...g...G...B...R". I modi sono $\binom{6}{3}$. Si ripete lo stesso ragionamento per le palline rosse e viene semplicemente $\binom{8}{1} = 8$. Quindi in questo caso abbiamo $\binom{6}{3} \cdot 8 = 160$ modi.

**l'ultima rossa è prima dell'ultima blu** Come in precedenza, disponendo prima le palline gialle (1 modo), poi la rossa (4 modi), infine le tre blu ($\binom{8}{3}$ modi), si ottiene $4 \cdot \binom{8}{3} = 224$ modi.

La probabilità cercata è $(160 + 224)/(9!/(2!3!4!))$.

**Soluzione del problema 14.** Sia $P = 2019$. Dato che le bisettrici hanno un punto comune, i tre lati di un triangolo di perimetro $P$ si scrivono come $a + b$, $a + c$ e $b + c$ per tre numeri positivi $a$, $b$ e $c$ tali che $a + b + c = \frac{P}{2}$. Nel caso che $P$ sia dispari, i tre numeri $a$, $b$ e $c$ sono razionali positivi con numeratore dispari e denominatore 2; così $a = n + \frac{1}{2}$, $b = m + \frac{1}{2}$ e $c = k + \frac{1}{2}$ e $n + m + k = \frac{P-3}{2} = p$. Le triple di numeri che verificano la condizione sono

$$\sum_{i=0} p(i+1) = p + 1 + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}.$$

**Soluzione del problema 15.** Ogni linea deve intersecare ogni linea già tracciata e, per dividere il piano nel maggior numero di zone, ogni punto di intersezione di quella con un'altra deve essere diverso da quelli già determinati. Si noti che, dopo il tracciamento della prima linea, ogni zona ha al massimo un solo lato in comune con il bordo esterno.
Sia $n$ il numero di linee già tracciate. La $(n + 1)$-esima retta incontra le altre, diciamo nell'ordine $r_1$, $r_2$, $r_3$,...,$r_n$. A partire da $n = 3$ una coppia di linee determina univocamente una zona; perciò da $n = 3$ la $(n + 1)$-esima linea divide in due zone ogni zona tra le coppie di linee $r_i$ e $r_{i+1}$, producendo così $n - 1$ nuove regioni. Inoltre divide in due anche la regione di piano che percorre prima di incontrare $r_1$ e quella dopo $r_n$. Quindi in totale ha prodotto $n + 1$ nuove regioni. Si noti che l'argomento vale anche per $n = 2, 3$, mentre per $n = 1$ le zone ottenute sono 2.
Perciò, per induzione, si determina immediatamente che il numero massimo di regioni in cui $n$ rette dividono il terreno è $\dfrac{(n+1)n}{2} + 1$.
Proviamo per induzione che il massimo numero di zone interne prodotte con la linea $(n + 1)$-esima è $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
Tracciando la prima (e la seconda) linea, il numero di zone interne prodotte è 0 come $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ per $n = 1$ (ed anche per $n = 2$). Tracciando la terza linea si produce esattamente una zona interna.
Supponiamo sia così dopo aver tracciato $n$ linee e proviamo che questo vale anche dopo aver tracciato la successiva $(n + 1)$-esima linea. Ciascuna coppia di linee $r_i$ e $r_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, determina una zona esterna o una zona interna. Nel primo caso, la linea $n+1$-esima separa la zona (esterna) in una esterna e una interna; nel secondo caso, separa la zona (interna) in due. In ogni caso genera una nuova zona interna. Inoltre, quando la linea $n+1$-esima collega il bordo alla linea $r_1$ e alla linea $r_n$, determina soltanto zone esterne. In totale vengono prodotte $n - 1$ nuove regioni interne; grazie all'ipotesi induttiva si trova che

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{((n+1)-1)((n+1)-2)}{2}.$$

Dato che una zona è esterna quando non è interna il problema chiede di trovare quando $2\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2-7n+2}{2}$ è un multiplo di 41, cioè

$$n^2 - 7n + 2 = 82k.$$

Per avere soluzioni intere il discriminante $41 + 328k = 41(1 + 8k)$ dell'equazione in $n$ deve essere un quadrato perfetto. Il minimo $k$ che fornisce questo deve essere tale che $1 + 8k$ sia un multiplo di 41 e $1 + 8 \cdot 5 = 41$.

**Soluzione del problema 16.** Titania vuole che valga la proprietà commutativa, Fondo la proprietà associativa.
Su un insieme di 2 elementi, che indichiamo con $\{0, 1\}$, si possono definire 16 operazioni binarie (il primo argomento compare nella colonna esterna, il secondo argomento compare sulla riga esterna):

| $\star_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

| $\star_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\star_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\star_4$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\star_5$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

| $\star_6$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\star_7$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\star_8$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\star_9$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

| $\star_{10}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\star_{11}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\star_{12}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\star_{13}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |

| $\star_{14}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\star_{15}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\star_{16}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Dato che il dominio è di due elementi, un'operazione $\star$ commutativa è associativa se e solo se $(0 \star 1) \star 0 = 1 \star (0 \star 0)$ e $(0 \star 1) \star 1 = 0 \star (1 \star 1)$.

**Soluzione del problema 17.** Per essere certi di essere tornati alla disposizione iniziale, occorre un numero di rimescolamenti che sia multiplo di quelli necessari per qualsiasi disordinamento effettuabile con 10 palline. Il minore tra questi è il minimo comune multiplo dei periodi di tutti i rimescolamenti possibili. Per ogni numero da 1 a 10 esistono rimescolamenti con tale periodo e il periodo massimo è 10.

**Soluzione del problema 18.**

$$\begin{aligned}
123456789101112 &= 112 \cdot 1000^0 + 101 \cdot 1000^1 + 789 \cdot 1000^2 + 456 \cdot 1000^3 + 123 \cdot 1000^4 \\
&= 112 \cdot (999+1)^0 + 101 \cdot (999+1)^1 + \cdots + 123 \cdot (999+1)^4 \\
&= 112 + 101 + 789 + 456 + 123 (\bmod 999) \\
&= 1581 (\bmod 999) \\
&= 581 \cdot 1000^0 + 1 \cdot 1000^1 (\bmod 999).
\end{aligned}$$

**Soluzione del problema 19.** Costruito il tetraedro, lo si appoggi sul tavolo con il lato colorato giallo davanti. Il lato blu può essere (l'unico) non a contatto con il lato giallo oppure può essere a contatto con il lato giallo. Nel primo caso, si ruoti il tetraedro in modo che il lato rosso sia appoggiato sul tavolo: il lato rosso può uscire dal vertice destro del lato giallo oppure dal vertice sinistro. In ciascuno di questi casi gli altri tre colori verde, viola e arancione possono essere disposti in $3! = 6$ modi diversi. Nel secondo caso, il lato blu può uscire dal vertice destro del lato giallo oppure dal vertice sinistro. In ciascuno di questi casi gli altri quattro colori possono essere disposti in $4! = 24$ modi.

**Soluzione del problema 20.** La condizione perché un numero $10a + b$ con $a > 0$ di due cifre sia educato è che $a + b \mid 9a$. Si noti innanzi tutto che un numero con $b = 9$ è educato se $9 \mid 8a$, dunque $a = 9$. Inoltre 101 è primo, perciò non è educato, mentre 98 non è divisibile per 17. Di conseguenza, una sequenza di quattro numeri educati consecutivi di due cifre deve

cadere in un intervallo compreso tra $10a$ e $10a+8$. Del resto, se $10a+b$ è il primo di una sequenza di quattro numeri educati consecutivi deve accadere che

$$a+b \mid 9a \quad a+b+1 \mid 9a \quad a+b+2 \mid 9a \quad a+b+3 \mid 9a.$$

Uno di questi è un multiplo di 3, uno è un multiplo di 4. Perciò deve essere che $12 \mid 9a$, cioè $6 \mid a$. Ma 61 e 67 sono primi, dunque non educati; $6+4=10 \nmid 64$ che non è educato. Perciò $D$ è maggiore di 105.
La condizione perché un numero $10^2a+10b+c$ con $a>0$ di tre cifre sia educato è che

$$a+b+c \mid 99a+9b = 9(11a+b). \tag{†}$$

In modo simile al caso con due cifre, si vede dapprima che un numero con $c=0$ è educato quando $a+b \mid 9(11a+b)$, cioè $a+b \mid 2\cdot 3^2\cdot 5a$.
Tra i numeri superiori a 100 la cui ultima cifra è 9 e la somma $a+b$ non è un multiplo di 3, sono perciò educati quelli che verificano $a+b+9 \mid (11a+b)$, cioè $a+b+9 \mid (10a-9)$: sono 209 e 629. Ma 208 e 211 non sono educati così come 628 e 631; perciò nessuno tra 209 e 629 compare in una sequenza di quattro numeri educati consecutivi. Per i restanti, quando $a+b$ è un multiplo di 3, deve comunque essere verificata (†) e si trovano 399 e 999. Ma 398, 401, 998 e 1001 non sono educati; così neppure 399 e 999 possono comparire in una delle sequenze cercate.
Inoltre, tra i numeri superiori a 100 la cui ultima cifra è 1 e la somma $a+b+1$ non è un multiplo di 3, sono educati quelli che verificano $a+b+1 \mid (11a+b)$, cioè $a+b+1 \mid 10a-1$: sono 481 e 511. Ma 479 e 482 non sono educati. Invece 510, 512 e 513 sono educati: questa è una delle sequenze appropriate.
Rimane perciò da considerare se esistono sequenze inferiori a questa. D'ora in poi ci limiteremo a numeri inferiori a 510, ma tutte le considerazioni che faremo valgono in generale.
Per i restanti numeri superiori a 100 la cui ultima cifra è 1, grazie a (†) si trovano 111, 171, 201, 261, 351, 441, 531, 621, 711 e 801. Ma 109 e 113 non sono educati, come 170 e 172, 199 e 202, 260, 350, 439 e 442.
Ne segue che una sequenza di quattro numeri educati consecutivi (inferiori a 510) non può coinvolgere numeri la cui ultima cifra sia 9 oppure 1, di conseguenza neppure 0.
Così si può svolgere anche la seconda osservazione fatta nel caso di due cifre: per avere una sequenza di quattro numeri educati consecutivi deve essere $4 \mid 9(11a+b)$, cioè

$$4 \mid (11a+b) \tag{‡}$$

dato che le prime due cifre dei numeri in una tale sequenza non possono cambiare. Le possibili coppie $(a,b)$ che verificano (‡), con i rispettivi valori di $11a+b$ e $a+b$, sono

| $a$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 8 | 1 | 5 | ... | |
| $11a+b$ | $2^2\cdot 3$ | $2^4$ | $2^3\cdot 3$ | $2^2\cdot 7$ | $2^2\cdot 3^2$ | $2^3\cdot 5$ | $2^4\cdot 3$ | $2^2\cdot 13$ | $2^5\cdot 7$ | ... | | |
| $a+b$ | 2 | 6 | 4 | 8 | 6 | 10 | 8 | 12 | 6 | ... | | |

Si noti ora che, se $A=10^2a+10b+c$ è il primo di una sequenza di quattro numeri educati consecutivi, a seconda del valore di $a+b$, uno dei divisori di $11a+b$ è 5 oppure 7. Questa osservazione permette di eliminare tutti i casi escluso $(a,b)=(3,7)$. Ma sappiamo già che 371 non è educato, dunque un'eventuale sequenza richiederebbe che $14=3+7+4 \mid 2^3\cdot 5$. ↯

**Soluzione del problema 21.** Le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le terne della forma $(n, 2n, 3n^2)$. Le osservazioni per dimostrare ciò sono le seguenti: siano $a$, $b$, $c$ interi positivi tali che $a^4+a\cdot b^3=c^2$.

(i) Sia $p$ un numero primo; se $p \mid b$ e $p \mid c$, allora $p \mid a$.

(ii) Sia $p$ un numero primo; se $p \mid a$, allora $p \mid c$ e $p \mid b$.

(iii) Sia $d=\mathrm{MCD}(a,b)$; se $a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$, allora $c'=\frac{c}{d^2}$ è intero e $a'^4+a'\cdot b'^3=c'^2$.

(iv) Se $a=1$, allora $b=2$ e $c=3$.

Il punto (i) discende dalla relazione $a^4 = c^2 - a \cdot b^3$.
Il punto (ii) è immediato dalla relazione $a^4 + a \cdot b^3 = c^2$.
Il punto (iii) è immediato dalle relazioni $c^2 = a(a^3 + \cdot b^3)$ e $b^3 = \frac{c^2 - a^4}{a}$.
Il punto (iv) si dimostra come segue: con l'intenzione di ottenere un assurdo, supponiamo che $b$ sia dispari. Perciò $c$ è pari; dunque $2 \mid a$. $\lightning$
Così $b$ è pari e $c$ è dispari, diciamo $b = 2b_1$ e $c = 2c_1 + 1$. Dunque $8b_1^3 = (c-1)(c+1) = 4c_1(c_1+1)$ e $2b_1^3 = c_1(c_1+1)$. Se $p$ è primo e $\gamma$ è il massimo tale che $p^\gamma \mid c_1$, allora $p^\gamma \mid c_1 + 1$ e $\gamma = 0$. Per l'arbitrarietà di $p$, si ha che $c_1 = 1$, da cui $b_1 = 1$, $b = 2$ e $c = 3$.
Considerata una generica terna $(a, b, c)$ tale che $a^4 + a \cdot b^3 = c^2$, sia $d = \mathrm{MCD}(a, b)$. Per (iii), presi $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$ e $c' = \frac{c}{d^2}$, si ha che $a'^4 + a' \cdot b'^3 = c'^2$. Ma $\mathrm{MCD}(a', b') = 1$; dunque, per (ii) $a' = 1$, e $b' = 2$ e $c' = 3$ per (iv). Così $a = d$, $b = 2d$ e $c = 2d^2$.

**Soluzione del problema 22.** Una successione $a, a+d, a+2d, \ldots, a+n \cdot d, \ldots$ verifica le due proprietà quando l'equazione $x^2 = a (\bmod d)$ non ha soluzioni e l'equazione $x^3 = a (\bmod d)$ ha (almeno una) soluzione. Infatti, la prima è ovvia. Per la seconda, si consideri un numero $x$ tale che $x^3 = a (\bmod d)$, cioè $x^3 = a + nd$ per qualche $n$ intero. Dato che $(x+m)^3 = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$, basta prendere $m = \ell d$: si trova che

$$(x + \ell d)^3 = x^3 + 3x^2\ell d + 3\ell^2 d^2 x + \ell^3 d^3 = a + d(n + 3x^2\ell + 3\ell^2 dx + \ell^3 d^2).$$

Questo assicura un'infinità di potenze terze nella successione.
La soluzione $x = 2$ per l'equazione $x^3 = 8 (\bmod 10)$ suggerisce di controllare se l'equazione $x^2 = 8 (\bmod 10)$ ha soluzione. È immediato vedere che non ce ne sono perché nessuna cifra ha quadrato che termina con 8, ma torna utile, anche per i calcoli successivi, prepararsi la tabella dei possibili valori di $x$, con i corrispondenti valori del quadrato e del cubo:

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 4 | 16 | 36 | 64 |
| $x^3$ | 8 | 64 | 216 | 512 |

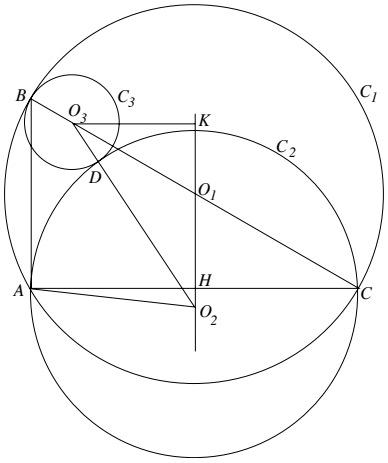
Dato che la differenza $d - a = 10 - 8 = 2$ è certamente minima, basta controllare se ci sono coppie $(a, d)$ che verificano la proprietà con $a < d < 10$ con $d - a = 2$.
Il primo $d$ pari tale che l'equazione $x^2 = 2 (\bmod d)$ ha soluzione è $d = 14$, per $x = 4$. Tra i $d$ fino a 14 l'equazione $x^3 = 2 (\bmod d)$ ha soluzione nei casi $d = 6$, per $x = 2$, e $d = 10$, per $x = 8$, ma le differenze $d - a$ sono maggiori di 2.
L'equazione $x^2 = 4 (\bmod d)$ ha soluzione per ogni $d$ pari maggiore di 4, per $x = 2$.
L'equazione $x^2 = 6 (\bmod d)$ ha soluzione nel caso $d = 10$, per $x = 6$. L'equazione $x^3 = 6 (\bmod d)$ ha soluzione soltanto nel caso $d = 10$, ancora per $x = 6$.

**Soluzione del problema 23.** Il triangolo $ABC$ è rettangolo in $A$ e $BC$ è un diametro di $C_1$. Inoltre $AC$ vale $20\sqrt{3}$. Poiché la circonferenza $C_3$ incontra la circonferenza $C_1$ solo nel punto $B$, essa deve essere tangente a $C_1$ in $B$. Ci sono quindi due possibilità: o è tangente internamente a $C_1$ o esternamente. La circonferenza $C_2$ ha il centro $O_2$ sull'asse del segmento $AC$. Detto $H$ il punto d'incontro dell'asse di $AC$ con $AC$ stesso, poniamo $HO_2 = x$. Pertanto il raggio di $C_2$ vale $O_2A = \sqrt{x^2 + (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + 300}$. La circonferenza $C_2$ incontra la circonferenza $C_3$ nel solo punto $D$, quindi devono essere tangenti in $D$. Allora il raggio di $C_2$ deve essere $O_2O_3 - r_3$, dove $r_3 = 5$ è il raggio di $C_3$. Sia $K$ la proiezione di $O_3$ sull'asse di $AC$.
Caso 1: $C_3$ tangente internamente.
$O_3K = 3/4 \cdot AH = 15\sqrt{3}/2$ e $HK = 7/8 \cdot AB = 35/2$, quindi $O_2O_3^2 = O_3K^2 + O_2K^2 = (15\sqrt{3}/2)^2 + (35/2 + x)^2$. Abbiamo così calcolato il raggio di $C_2$ in due modi diversi e si ottiene allora l'equazione:

$$\sqrt{\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} + x\right)^2} - 5 = \sqrt{x^2 + 300}$$

cioè:

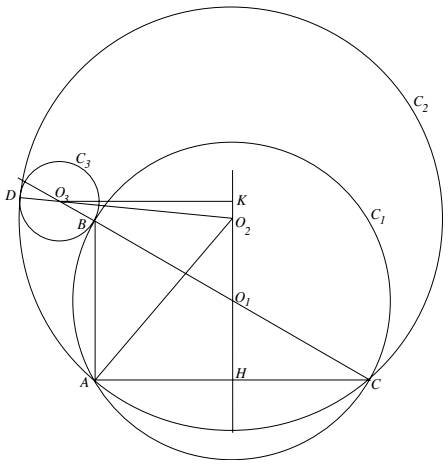
$$\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} + x\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 300} + 5\right)^2$$




che si trasforma in $7x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 300}$ (quindi $x \geq -30/7$). Quadrando si ottiene l'equazione $3x^2 + 28x - 20 = 0$ che ha per unica soluzione accettabile $x = 2/3$. Allora il raggio di $C_2$ vale $52/3$.
Caso 2: $C_3$ tangente esternamente.
I conti sono simili ai precedenti. Ora $O_3K = 5/4 \cdot AH = 25\sqrt{3}/2$ e $HK = 9/8 \cdot AB = 45/2$. Quindi $O_2K = 45/2 - x$ e il raggio di $C_2$ vale sia $O_2A$ sia $O_2O_3 + 5$, da cui si ottiene:

$$\sqrt{\left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{45}{2}\right)^2} + 5 = \sqrt{x^2 + 300}$$

da cui si ottiene l'equazione $77x^2 - 2340x + 15700 = 0$ che ha per unica soluzione accettabile $x = 1570/77$. Con questo valore di $x$ il raggio di $C_2$ è $2060/77$.
Se viene ricercata la lunghezza massima del segmento di $O_2E$ con $E$ su $C_3$, nel primo caso il punto $E$ va scelto diametralmente opposto a $D$, nel secondo caso va scelto coincidente con $D$. Nel primo caso si ottiene $52/3 + 10$, nel secondo caso di ottiene il raggio di $C_2$, cioè $2060/77$. Tizio quindi deve trovare $d_1 = 82/3$. Analogamente la distanza minima si ottiene nel primo caso scegliendo $E$ coincidente con $D$, nel secondo caso scegliendo $E$ su $C_3$, diametralmente opposto a $D$. Caio deve quindi aver trovato il minimo di questi due valori, cioè $d_2 = 1290/77$.




**Soluzione del problema 24.** Per prima cosa bisogna osservare che, se le carte con un numero dicono la verità, esse devono essere in sequenza in ordine decrescente, per seme: infatti se anche solo con il 2 così non fosse, al 7 seguirebbero 7 carte dello stesso seme e al 2, 2 carte dello stesso seme, in totale 11 carte di un seme, il che è impossibile.
Supponiamo che a mentire sia una coppia di carte senza un numero. All'interno del mazzo ci deve essere una coppia di carte consecutive di semi diversi. La prima delle due carte non può essere una carta con un numero (perché la segue una carta di seme diverso), né una carta senza numero che dice il vero: deve pertanto essere una delle due carte che mente;

supponiamo sia rossa per semplicità. A seguire ci può essere, a priori, o il 7 o la carta che mente dell'altro seme, come sopra detto, supponiamo nero. Se fosse il 7, seguirebbero esattamente 7 carte nere, non tutte quindi, pertanto ci deve essere un secondo punto del mazzo, precedente a queste carte nere numerate, in cui due carte consecutive hanno semi diversi. Con un ragionamento uguale al precedente si può concludere che la prima di queste due carte deve essere l'altra che mente, ovvero la nera. Abbiamo pertanto disposto le carte bugiarde e il mazzo si presenta fino ad adesso come una serie di carte nere che finiscono con quella che mente, una serie di carte rosse che finiscono con quella che mente e ancora una serie di carte nere. Ma questo è impossibile: infatti il 7 rosso dovrebbe essere la prima carta rossa ma in questo modo sarebbe seguito da 9 carte rosse invece che 7. Pertanto le due carte che mentono sono consecutive e rappresentano l'unico cambiamento di seme del mazzo. A questo punto la scelta è "obbligata": due carte senza numero sincere, le carte dal 7 al 2, una carta senza numero sincera e la carta bugiarda di un seme, seguita dalla carta bugiarda, una carta senza numero sincera, le carte dal 7 al 2 e due carte senza numero sincere dell'altro seme. I modi possibili per questo caso sono pertanto: $2 \cdot 4 \cdot (3!)^2 = 288$.
Supponiamo che a mentire sia un numero diverso da 7. Si osservi che, in questo caso, le carte dal 7 a 2 saranno sempre consecutive in ordine decrescente, considerando che nel posto occupato dal numero bugiardo ci sarà invece una delle carte senza numero. Il ragionamento si sviluppa, poi, in modo del tutto analogo al caso precedente, arrivando a concludere, anche in questo caso che le due carte bugiarde sono consecutive al centro del mazzo e rappresentano l'unico cambio di seme tra due carte consecutive. Come prima, a questo punto la scelta è obbligata e i modi possibili per questo caso sono: $2 \cdot 5 \cdot (4!)^2 = 5760$.
Supponiamo infine che le carte bugiarde siano quelle contrassegnate dal numero 7. Supponiamo vi sia uno dei due semi le cui carte non sono tutte vicine ma separate in almeno due blocchi da almeno una carta dello stesso seme. Come già osservato nei casi precedenti, ciò comporterebbe "due cambi di seme" e siccome per ogni cambio la carta che precede deve mentire, non possono essercene altri. Consideriamo le due carte consecutive di semi diversi che costituiscono il primo cambio di seme. La seconda, dovendo dire la verità non può essere una delle carte senza numero (perché preceduta da una carta di seme differente), ma neanche un numero (perché è seguita da ben 9 carte del suo stesso seme). Quindi anche in questo caso vi è un solo cambio di seme, costituito dalle due carte che mentono. Per questo caso pertanto i modi possibili sono: $2 \cdot (4!)^2 = 1152$.