V Gara a Squadre, Liceo Scientifico "A.Einstein", Teramo

5 aprile 2011

Durata: 90 minuti

Istruzioni generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Se la quantità richiesta è una percentuale o la misura di un angolo espressa in gradi, si indichi il numero che precede il simbolo. Ad esempio 12% e 25° vanno indicati rispettivamente con 0012 e 0025.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142, \qquad \sqrt{3} = 1,7321, \qquad \sqrt{6} = 2,4494, \qquad \sqrt[3]{7} = 1,9129, \qquad \pi = 3,1416$$

Gara di allenamento in preparazione alla gara Nazionale di Cesenatico.

Problemi

1. Numero civico. **20 punti**

Il numero civico del Liceo Olimpico di Matelandia è formato da tre cifre, tutte pari. La cifra delle centinaia è maggiore di quella delle decine, che a sua volta è maggiore di quella delle unità. Il prodotto delle cifre è 96. Determinare il suddetto numero.

---

2. Il numero π. **20 punti**

Una circonferenza di lunghezza $k\pi$ cm delimita una regione di area $3k\pi$ cm^2. Qual è il valore di k.

---

3. Numeri di quattro cifre. **20 punti**

Un numero di quattro cifre è ottenuto utilizzando una ed una sola volta le cifre 1,3,5,8. Qual è la media di tutti i possibili numeri che possono essere così ottenuti ?

---

4. Una somma minima. **20 punti**

Siano a, b due numeri interi positivi tali che $19a + 17b = 13345$. Qual è il minimo valore possibile di $a + b$?

---

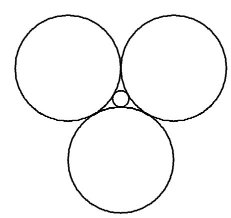
5. Punti a coordinate intere. **20 punti**

Si chiama *aritmopunto* un punto avente entrambe le coordinate intere. Ad esempio $(3, -6)$ è un aritmopunto, mentre $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ non lo è. Dire quanti sono gli aritmopunti contenuti nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 5.

---

6. Cerchi tangenti. **20 punti**

Un cerchio di raggio 1 è tangente esternamente a tre cerchi di raggio r come è indicato in figura. Il valore di r può essere scritto nella forma $r = a + b\sqrt{3}$, dove a, b sono numeri interi. Determinare $a + b$



---

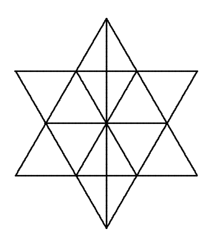
7. Rapporto di segmenti. **20 punti**

Dato il rettangolo $ABCD$, si tracci la retta KL passante per il punto medio K di AB ed il punto L di BC tale che $BL : LC = 3 : 2$. Detto M il punto di intersezione della retta KL con BD, determinare $55 \cdot \frac{BM}{BD}$.

---

8. Conteggio di triangoli. **20 punti**

Quanti triangoli vi sono nella seguente figura?



9. Una misteriosa equazione. **20 punti**

Un'operazione $\otimes$ sui numeri reali positivi è definita dalla legge $x \otimes y = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$. L'equazione

$$(((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes z) = \frac{5}{4}$$

ammette due soluzioni z_1 e z_2 con $z_1 < z_2$. Determinare $z_1 + z_2$.

---

10. Fattoriale. **20 punti**

Sia n un numero naturale. Si definisce *fattoriale* di n il numero

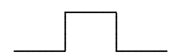
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Dire con quanti zeri consecutivi termina il numero 100!.

---

11. Una macchina. **20 punti**

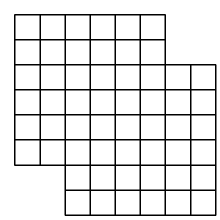
Una macchina M opera su segmenti rettilinei. Tale macchina trasforma ogni segmento nella forma indicata nell figura a lato, dove il segmento originale è convertito in tre segmenti uguali, aventi una lunghezza pari a $\frac{1}{3}$ del segmento originale e due segmenti perpendicolari a questi tre. I due segmenti perpendicolari hanno una lunghezza pari a $\frac{1}{4}$ del segmento originale. Applicando la macchina 5 volte ad un segmento avente una lunghezza iniziale di 320 unità, quanto sarà lunga la poligonale ottenuta ?



---

12. Quadrati. **20 punti**

Da una scacchiera 8×8 sono rimossi due blocchi 2×2 da due angoli diagonalmente opposti. Quanti quadrati (di tutte le dimensioni) rimangono sulla scacchiera?



---

13. Somma di quadrati. **20 punti**

Se $a^3 + 3ab^2 = 14$ e $b^3 + 3ba^2 = 13$ determinare $a^2 + b^2$

---

14. Un'equazione complicata. **20 punti**

L'equazione

$$x^3 - 2000x^2 + 2^{2000}x = 2^{2001}$$

ha tre radici reali a, b, c. Siano m, n due numeri interi primi tra loro[1] tali che

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{m}{n}$$

Determinare $m + n$.

[1] Due numeri interi si dicono *primi fra loro* se il loro massimo comun divisore è uguale a 1.

15. Equazione diofantea. **20 punti**

L'equazione $x^2 - y^2 = 60$ ha due soluzioni (a, b) e (c, d) con a, b, c, d interi positivi. Determinare $a + b + c + d$

---

16. Coppie in sequenza. **20 punti**

Coppie ordinate di numeri interi positivi soino scritte in sequenza nel modo seguente:

$$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),$$

$$(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(5,1),\dots$$

Ad esempio la coppia $(5,1)$ si trova nella 11^{ma} posizione. Dire in che posizione si trova la coppia $(23,2)$.

---

17. Una partita a poker. **20 punti**

Anna e Luca fanno parte di una comitiva formata da 10 persone. Dire in quanti modi si può formare un gruppo di quattro persone per giocare una partita a poker, sapendo che Luca è disposto a giocare solo nei gruppi in cui è presente anche Anna.

---

18. Multipli di 5 o di 7. **20 punti**

Dire quanti sono i numeri di 3 cifre multipli di 5 o di 7 ma non di 35.
