

Progetto Olimpiadi della Matematica



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

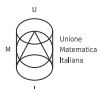
$$\sqrt{3} \approx 1,7321$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2361$$

$$\sqrt{7} \approx 2,6458$$

$$\pi \approx 3,1416.$$





2 marzo 2018

Gara a Squadre – Testi dei problemi



1. *Un nuovo inizio*

Emanuele Ma hanno lasciato il titolo sbagliato della versione passata?

Veronica No, è giusto: MASTERMATH. (*Emanuele resta senza parole*)

Chef Pino Bastardich Benvenuti! La prima prova vi richiede di utilizzare la seguente ricetta: sia n un intero maggiore di 2 e minore di 9999.

- (i) Si divide n per 2.
- (ii) Si trovano i fattori primi di n e si seleziona il minimo m tra questi.
- (iii) Si eleva m al quadrato.
- (iv) Al risultato si sottrae 1 e si ottiene r .
- (v) Se il numero r è pari si ripete la ricetta dal punto (i).

Qual è il più grande numero r che si ottiene al punto (v) a cui non si applica il punto (i)?

Veronica (*Rivolto a Emanuele*) Ti avevo detto che il nome era giusto.

2. *Spettatori*

I parenti dei concorrenti sono sistemati in una sala davanti a un grande schermo che proietta le fasi del programma: le poltrone di ogni fila sono numerate da 1 a 10, le file sono numerate con le lettere dell'alfabeto italiano da A a L, la fila A è la prima davanti allo schermo. La sala è piena, è chiaro al regista che gli spettatori si dividono tra onesti—che dicono sempre la verità—e bugiardi—che mentono sempre.

Regista Dobbiamo testare l'impianto sonoro fila per fila: dite qualcosa.

Tutti quelli seduti nella fila L Lo spettatore nella poltrona con lo stesso numero della mia nella fila davanti a me è un bugiardo!

Tutti quelli seduti nella fila I Lo spettatore nella poltrona con lo stesso numero della mia nella fila davanti a me è un bugiardo!

⋮

Tutti quelli seduti nella fila B Lo spettatore nella poltrona con lo stesso numero della mia nella fila davanti a me è un bugiardo!

Tutti quelli seduti nella fila A Gli spettatori nella poltrona con lo stesso numero della mia nelle file dietro alla mia sono bugiardi.

Voce fuori campo QUANTI SONO I BUGIARDI NELLA SALA?

3. *Prova in esterna*

Regista La prova in esterna durerà tre giorni a Tegoria Soprana.

Produttore I tre giorni devono cadere tra aprile e maggio.

Regista Dobbiamo fare in modo che non cadano il 12 maggio, ho un impegno improrogabile.

Produttore (*Sospira*) Molto bene, fisso le date e te le dico domani. (*Se ne va.*)

Regista (*Rimasto solo*) Mi sono sbagliato: l'impegno improrogabile è il 21 maggio, non il 12 maggio!

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL PRODUTTORE FISSI LA GITA IN MODO CHE IL REGISTA POSSA ESSERE PRESENTE?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità richiesta.*]

4. *Olio bollente 3*

Ludovico (*Sottovoce a Emanuele*) Considera una funzione f reale di variabile reale tale che, per ogni numero x , vale che $f(x) - f(x - 2) = \frac{1}{5}x - 200$. Sapendo che $f(0) = 0$, quanto vale $f(2018)$? (*Emanuele urla perché, distraendosi per ascoltare Ludovico, si è scottato con l'olio bollente.*)

5. *Pane*

Chef Federico Polero Dovete preparare il pane: la pasta ha una massa di 1 kg ed è uniforme, con un volume di 1 dm^3 . La dovete far lievitare: all' n -esima lievitazione il volume aumenta di $1/n$ rispetto al volume prima della lievitazione. Dopo ogni lievitazione, al fine di determinare il grado di lievitazione migliore per fare il pane, rimuovete un decimo della massa (iniziale) dalla pasta, cioè 1 hg. Poi rimettere a lievitare quella rimanente.

Voce fuori campo QUANTO È IL VOLUME IN cm^3 DELLA PASTA RIMANENTE AL TERMINE DELLA DECIMA LIEVITAZIONE?

6. *Cartoncini*

In cucina ci sono 2018 concorrenti; sulla schiena di ognuno viene attaccato un cartoncino di colore verde o rosso.

Chef Bobo Dvornicciuolo Chi riuscirà a vedere 587 cartoncini verdi sulla schiena di altrettante persone, riceverà il peperoncino come ingrediente; gli altri riceveranno la soia. (*I concorrenti si muovono cercando cartoncini verdi e dichiarano i nomi di tutti quelli che hanno trovato*)

Veronica (*Commentando il risultato con Emanuele*) Ho avuto il peperoncino.

Emanuele Beata te! A me è toccata la soia.

Voce fuori campo QUANTI CONCORRENTI HANNO RICEVUTO IL PEPERONCINO?

7. *Olio bollente 4*

Ludovico (*Sottovoce a Emanuele*) Diciamo che un numero reale è *semi-intero* se il suo doppio è intero. Fissa s_1 e s_2 due semi-interi tali che $s_1 + s_2 = \frac{153}{2}$ e $s_1 \cdot s_2 = 1368$. Qual è la somma dei numeri interi compresi tra $|s_1 - s_2|$ e $s_1 + s_2$?

Emanuele (*Prendendo un mestolo e immergendolo nell'olio bollente*) Vorrei saperlo anch'io!

8. *Pelapatate*

Emanuele (*Rivolto a Ludovico che sta sbucciando patate*) In un rettangolo di lati 30 m e 60 m sono inserite due circonferenze identiche, tangenti tra loro e ciascuna tangente a tre lati del rettangolo. Tracciando la diagonale si forma su ciascuna circonferenza una corda. Quanti centimetri misura la più lunga delle due? (*Ludovico si affetta un dito con il pelapatate.*)

9. *Piatti equilibrati*

Chef Pino Bastardich Nella dispensa sono disponibili dodici ingredienti: 4 sapidi, 3 dolci, 2 croccanti, 3 morbidi. Perché un piatto sia equilibrato ci devono essere lo stesso numero di ingredienti sapidi e ingredienti dolci e lo stesso numero di ingredienti croccanti e di ingredienti morbidi. Per preparare un piatto serve almeno un ingrediente.

Luigi Amedeo È logico, chef!

Voce fuori campo QUANTI PIATTI EQUILIBRATI SI POSSONO FARE?

10. *Gesti*

Ludovico (*Sottovoce a Luigi Amedeo*) Qual è il più grande numero naturale n tale che n^2 è il prodotto di tre fattori, diversi tra loro e tutti inferiori a 100? (*Luigi Amedeo risponde a gesti.*)

11. *Uovo 1*

Luigi Amedeo (*Sottovoce a Ludovico*) Scomponi il polinomio $x^8 + 31x^4 + 256$ come prodotto di 4 polinomi a coefficienti reali, tutti dello stesso grado! (*L'uovo che ha in mano Ludovico cade a terra.*)

[*Dare come risposta la somma dei valori assoluti dei coefficienti dei quattro polinomi trovati moltiplicata per 100.*]

12. *Mystery Box*

Chef Bobo Dvornicciuolo Nella Mystery Box ci sono 100 palline, numerate da 1 a 100. (*Rivolto a Ludovico e Emanuele*) Oggi (*fa una pausa*) uno di voi (*fa un'altra pausa*) sarà eliminato. Ludovico estrae una pallina, ci mostra il numero sulla pallina, dopodiché la rimette nella Mystery Box. Poi Emanuele ne estrae due. Emanuele viene eliminato se la media tra i valori sulle palline che ha estratto è esattamente uguale al valore riportato sulla pallina che aveva estratto Ludovico.

Emanuele (*Guardando le palline che ha estratto*) Sono eliminato!

Voce fuori campo QUAL ERA LA PROBABILITÀ CHE EMANUELE FOSSE ELIMINATO?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità richiesta.*]

13. *Libro di ricette*

Luigi Amedeo Hai visto che dal libro di ricette di Pellegrino Arsanti hanno strappato il capitolo sui rifreddi?

Veronica Sì. Ho notato anche che ogni capitolo è di 14 pagine, il libro era di 336 pagine, e la somma dei numeri delle pagine rimaste è 53571.

Voce fuori campo QUAL È LA PRIMA PAGINA DEL CAPITOLO STRAPPATO?

14. *Pesca*

Chef Federico Polero Ludovico, Francesco, dobbiamo decidere chi va in dispensa! (*Rivolto a Ludovico*) Pesca due numeri distinti in questo sacchetto che contiene quattro palline numerate 1, 2, 3 e 4. (*Rivolto a Francesco*) Pesca una pallina da quest'altro sacchetto che contiene nove palline numerate da 1 a 9. Vince Francesco se il numero che ha pescato è maggiore della somma dei due numeri pescati da Ludovico.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE VINCA FRANCESCO?

[*Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

15. *Uovo 2*

Ludovico (*Sottovoce a Luigi Amedeo*) All'interno di un triangolo isoscele di base 294 mm e altezza 196 mm è costruito un quadrato che ha due vertici su un lato obliquo, uno sulla base e il quarto sull'altro lato obliquo. Quanto vale l'area del quadrato in cm^2 ? (*Luigi Amedeo si concentra, Ludovico gli infila un uovo nella tasca del grembiule.*)

16. *Scherzo*

Francesco Prendi un polinomio di quarto grado monico. (*Rivolto a Ludovico che sta saltando alcuni scampi*) Diciamo $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sai che $p(1) = 1$, $p(2) = 4$, $p(3) = 9$, $p(4) = 16$. (*Ludovico si distrae e lascia cadere la padella sul fuoco.*)

Chef Pino Bastardich (*Urlando*) Ludovico, che cosa diavolo stai facendo? Dove credi di essere? Alle Olimpiadi della Matematica? Se ti distrai il tuo piatto muore e tu sei morto.

Francesco Quanto vale $p(5)$? (*Ludovico sviene.*)

17. *In cucina*

Chef Alessandra Krucnann (*Si aggira tra i concorrenti ai fornelli; parla tra sé e sé*) A quali concorrenti mi rivolgo? Forse è meglio che vada a caso per non fare favoritismi. Prima di spostarmi di due metri, per scegliere in che direzione muovermi, lancio il dado a 4 facce che ho in tasca: se esce 1, vado di due metri verso la parete a Nord; se esce 2, vado di due metri verso la parete a Ovest; se esce 3, vado di due metri verso la parete a Sud; se esce 4, vado di due metri verso la parete a Est. (*Dopo aver fatto nove lanci e relativi spostamenti, guarda il concorrente davanti a cui è arrivata: è Francesco*) Sono arrivata a 10 metri in linea d'aria dal punto da cui ero partita.

Voce fuori campo QUAL ERA LA PROBABILITÀ CHE, ESATTAMENTE DOPO 9 SPOSTAMENTI DI DUE METRI, CHEF ALESSANDRA KRUCNANN FOSSE A 10 METRI DA DOVE ERA PARTITA?

[*Dare come risposta il numeratore della frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità cercata.*]

18. *Struttura della squadra*

Chef Federico Polero Ludovico, con la tua squadra hai preparato ottimi pasticcini, ma ora dovete predisporre una struttura in cui incasellare tutti i pasticcini che avete preparato. Per prepararla avete a disposizione bastoncini lunghi 10 cm che potete unire a tre a tre usando i 32 snodi apposti che vi abbiamo fornito che permettono di unire tre bastoncini, ciascuno ortogonale a ciascun altro. Attenzione! Dovete *sempre* usare tre bastoncini con uno snodo, altrimenti questo non li blocca insieme e la struttura crolla, come pure ogni bastoncino deve avere uno snodo a ciascuna delle sue due estremità. Preparate una struttura come vi ho appena spiegato che possa essere chiusa all'interno di questa scatola trasparente a forma di parallelepipedo retto la cui dimensione minima è di 10 cm. Poi vi spiegheremo come incasellare i pasticcini.

Voce fuori campo QUAL È LA MASSIMA DISTANZA IN MILLIMETRI CHE PUÒ INTERCORRERE, IN LINEA D'ARIA, TRA I VERTICI DI DUE SNODI DI UNA STRUTTURA CHE RISPETTA TUTTE LE CONDIZIONI RICHIESTE DA CHEF FEDERICO POLERO?

19. *Dadi*

Veronica ha un comune dado con le sei facce bianche. Vuole riempire ciascuna delle sei facce con un numero da 1 a 9 in modo che la somma delle facce opposte sia costante e due facce diverse non abbiano lo stesso numero.

Voce fuori campo QUANTI DADI PUÒ GENERARE VERONICA A MENO DI ROTAZIONI?

20. *Fagioli 1*

Veronica e Ludovico stanno rilassandosi vicino alla dispensa. Ciascuno ha preso tre sacchetti di fagioli: uno con duecento fagioli rossi, uno con duecento fagioli gialli, uno con duecento fagioli verdi. Contemporaneamente ciascuno dei due prende dai propri sacchetti 9 fagioli come vogliono, poi confrontano quanti fagioli hanno per ciascun colore. Ogni volta che, nel confronto per un dato colore, uno ha più fagioli dell'altro fa un punto. Vince chi ha maggiore la somma dei punti fatti nei tre confronti.

Chef Alessandra Krucnann Ma usano qualche strategia?

Chef Bobo Dvornicciuolo No, nessuna; lo fanno solo per passare il tempo. Useranno strategie in cucina.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE VINCA LUDOVICO?

[Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

21. *Distrazione*

Francesco e Veronica sono insieme al Luna Park a distrarsi dopo una giornata ai fornelli. Passano davanti allo stand del tiro a segno.

Francesco (Rivolto a Veronica) Ti sfido al tiro a segno.

Gestore del tiro a segno I tiri a disposizione sono 10. Le regole di attribuzione del punteggio sono le seguenti: non appena il giocatore fa un centro gli viene attribuito un punto; se al tiro dopo fa nuovamente centro, gli vengono assegnati due punti, e così via finché non sbaglia. Un eventuale centro successivo vale un solo punto, e la successione ricomincia. Ad esempio se un giocatore fa 5 centri di fila, poi sbaglia un tiro, e in seguito fa nuovamente 4 centri, ottiene un punteggio di $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ con la prima serie, e di $1 + 2 + 3 + 4$ con la seconda: il punteggio totale è di 25 punti. (Francesco e Veronica giocano entrambi, ottenendo esattamente lo stesso punteggio.)

Francesco (Irritato) Non è giusto però, io ho fatto tre centri in più di te!

Veronica Le regole sono regole! È inutile che ti lamenti.

Voce fuori campo QUALI SONO IL MINIMO E IL MASSIMO PUNTEGGIO CHE POSSONO AVER TOTALIZZATO I DUE AMICI?

[Nella risposta si indichino i due valori, il minimo nelle prime due caselle e il massimo nelle seconde due.]

22. Senza senso

Chef Alessandra Krucnann Attenti: la lettera n indica un numero intero compreso tra 1 e 10000, estremi esclusi. Considerate le seguenti frasi:

- (1) Il numero n è divisibile per il numero di frasi vere.
- (2) Se la frase successiva è falsa, allora n è potenza di un numero primo.
- (3) Le frasi precedenti a questa sono tutte vere e la somma delle cifre di n è minore di 9.
- (4) Ci sono più frasi vere dopo di questa che prima di questa.
- (5) La cifra delle unità di n è il numero della prima frase falsa.
- (6) Le frasi dispari sono false oppure n è minore di 2018.

Veronica Ma la frase (5) non ha senso!

Chef Alessandra Krucnann Hai ragione, Veronica! Non vi ho detto che non tutte le frasi sono vere. Però vi assicuro che le frasi vere sono di più delle frasi false. Così le sei frasi non sono contraddittorie e le varie possibilità determinano alcuni valori di n . Mi sapete dire il più grande e il più piccolo di questi valori?

[Dare come risposta la somma dei due valori.]

23. Torta di compleanno

Chef Bobo Dvornicciuolo Perché il tuo dolce si chiama “torta di compleanno”?

Ludovico Perché va bene per tutti i compleanni da uno a quindici.

Chef Bobo Dvornicciuolo Ecco perché è piena di numeri! La torta sembra una scacchiera quadrata otto per otto. In ogni quadratino ha scritto un numero: nel riquadro in alto a sinistra c'è 1; poi spostandoti verso destra hai scritto il numero precedente aumentato di 1 e così via, come pure spostandoti verso il basso hai scritto il numero sopra aumentato di 1.

Ludovico Sì, chef. Così in fondo alla prima riga c'è un 8 e in fondo alla prima colonna c'è pure un 8.

Chef Bobo Dvornicciuolo E nel riquadro in basso a destra c'è 15.

Chef Alessandra Krucnann Prendi un quadrato Q qualunque sulla scacchiera formato da quadratini. Chiama s la somma dei numeri che compaiono all'interno del quadrato Q . Chiama S la somma di tutti i numeri sulla torta. Quanti sono i quadrati Q tali che s divide S ?

24. Fagioli 2

Chef Alessandra Krucnann Vedete i sacchetti vuoti che avete davanti a voi. Dovete scegliere un numero naturale a_1 minore di 10000 e inserire nel sacchetto a_1 fagioli. Poi dovete eseguire la seguente ricetta:

- (i) sommare le cifre di a_1 ottenendo un numero a_2 ;
- (ii) inserire nel sacchetto altri a_2 fagioli nel sacchetto;
- (iii) sommare le cifre di a_2 ottenendo un numero a_3 ;
- (iv) inserire nel sacchetto altri a_3 fagioli;

e continuare così. Se il numero a_n è di una singola cifra, la somma delle sue cifre è a_n . Vengono eliminati tutti i concorrenti che, a qualche passo della ricetta, avranno nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 2365.

Voce fuori campo PER QUANTI NUMERI a_1 IL SACCHETTO CONTERRÀ, ALL'INIZIO O A UN CERTO MOMENTO DELLO SVOLGIMENTO DELLA RICETTA, UN NUMERO DI FAGIOLI MULTIPLO DI 2365?